

Remerciements

Ce travail de recherche a été fait au sein de l'URISA-Sup'Com, Unité de Recherche en Imagerie Satellitaire et ses Applications, en collaboration avec le projet ARIANA-INRIA Sophia Antipolis, projet de recherche qualifié en Problèmes Inverses en Observation de la Terre et Cartographie, qui est un projet commun INRIA, CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis via le laboratoire I3S.

Ce travail se situe dans le cadre du projet de collaboration tuniso-français INRIA-STIC Tunisie intitulé «Indexation multi-résolutions d'images satellitaires» de code 05/I03. Le responsable tunisien de ce projet est Ziad BELHADJ, Maître de conférences à Sup'Com et directeur de l'URISA et Nozha BOUJEMAA est la responsable du projet INRIA-STIC Tunisie en France et qui est la directrice du projet de recherche IMEDIA à l'INRIA-Rocquencourt.

Je tiens tout d'abord à remercier Faouzi GHORBEL, Professeur à l'ENSI, de présider ce jury de mastère. Je voudrais également remercier Sylvie SEVESTRE, Maître de conférences à l'Université René Descartes - Paris 5, d'avoir accepté d'être le rapporteur, ainsi que Amel BENZAZZA, Maître de conférences à Sup'Com, d'avoir bien voulu participer à ce jury.

Je souhaite également remercier mes directeurs de recherche Mr. Ziad BELHADJ et Mme. Josiane ZERUBIA, responsable scientifique du projet ARIANA, qui m'ont apporté leur expertise dans le domaine de télédétection. Je remercie aussi mon superviseur de travail Mr. Ian JERMYN, chercheur permanent au sein du projet ARIANA, pour sa plus grande disponibilité continue tout au long de ce travail.

La suite des remerciements va à mon entourage. Tout d'abord, les membres de l'URISA et du projet ARIANA pour l'ambiance très chaleureuse qu'ils ont su créer. Et enfin, plus particulièrement, un grand merci à mes parents, à mes soeurs et à mes amis, pour leur présence et leur attention.

Table des matières

Remerciements	i
Table des matières	ii
Table des figures	iv
Introduction	1
Le traitement d'image et la reconnaissance d'objets	1
Contributions et articulation de ce travail	2
1 État de l'art des contours actifs	4
1.1 Approche probabiliste-approche variationnelle	4
1.2 Les contours actifs	5
1.3 Les contours actifs d'ordre supérieur : CAOS	7
1.4 Énergie géométrique du modèle des CAOS	8
1.5 Minimisation de l'énergie : algorithme de descente de gradient	9
1.6 Problématique	10
1.7 Invariance d'échelle du modèle des CAOS	11
1.8 Conclusion	12
2 Diagramme de phase du modèle de gaz de cercles	13
2.1 L'énergie géométrique d'un cercle	13
2.2 Stabilité d'un cercle	15
2.2.1 Analyse des différents comportements de l'énergie d'un cercle, $e_0(r_0)$	15
2.2.2 Analyse de l'énergie du premier ordre, $e_1(r_0)$	17
2.2.3 Analyse de l'énergie de second ordre, $e_2(k, r_0)$	18
2.3 Résultats expérimentaux	22
2.4 Conclusion	25

3 Diagramme de phase du modèle d'une barre longue	26
3.1 L'énergie géométrique d'une barre de longueur infinie	26
3.2 Stabilité d'une barre	29
3.2.1 Analyse des comportements de l'énergie par unité de longueur d'une barre longue, $e_0(w_0)$	29
3.2.2 Analyse de l'énergie par unité de longueur du premier ordre, $e_1(w_0)$	30
3.2.3 Analyse de l'énergie par unité de longueur de second ordre, $e_2(k, w_0)$	33
3.3 Résultats expérimentaux	37
3.4 Conclusion	38
Conclusion et Perspectives	40
Synthèse des travaux effectués	40
Diagramme de phase d'un cercle	40
Diagramme de phase d'une barre longue	40
Perspectives	41
Analyse de la zone critique du diagramme de phase	41
Effet de bords du modèle de la barre	41
A Détails des calculs de stabilité du modèle de gaz de cercles	42
A.1 La longueur du contour : $L(\gamma)$	43
A.2 L'aire du contour : $A(\gamma)$	43
A.3 L'énergie quadratique	43
A.3.1 Produit interne des vecteurs tangents	44
A.3.2 Distance entre deux points du contour	44
A.3.3 Fonction d'interaction	44
A.3.4 Calcul de l'énergie quadratique	45
B Détails des calculs de stabilité du modèle de la barre	49
B.1 Calcul de la longueur $L(\gamma)$	49
B.2 Calcul de l'aire $A(\gamma)$	50
B.3 Calcul de l'énergie quadratique $E_Q(\gamma)$	50
B.3.1 Produit interne des vecteurs tangents $\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)$ et $\dot{\gamma}_\nu(t'_\nu)$	51
B.3.2 Calcul de la distance quadratique	51
B.3.3 Fonction d'interaction	51
B.3.4 Calcul de $G(t_\mu, t'_\nu)$	52
Bibliographie	60

Table des figures

1.1	Représentation graphique de la fonction d'interaction Φ . d et ϵ sont les deux paramètres de Φ	9
1.2	Les deux configurations géométriques favorisées par le modèle des CAOS donné par l'équation 1.18.	10
1.3	Evolution d'un contour initial (un rectangle arrondi) pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS donné par l'équation 1.18 en utilisant l'algorithme de la descente du gradient.	11
2.1	Les comportements de l'énergie $e_0(r_0)$ pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C	16
2.2	Représentation graphique des positions des extrémums de l'énergie $e_0(r_0)$ en fonction du paramètre β_C pour une valeur de $\alpha_C = 1$. La courbe continue correspond au minimum et celle en pointillée correspond au maximum. . .	17
2.3	Détermination des limites inférieures et supérieures du paramètre $\hat{\alpha}$. Les courbes bleues et rouges relatives aux figures (a), (b) et (c) correspondent respectivement aux fréquences 0 et 2. Le courbe bleue et la courbe rouge relatives à la figure (d) correspondent respectivement à la borne supérieure et à la borne inférieure de $\hat{\alpha}$	20
2.4	Diagrammes de phase d'un cercle correspondants aux différentes régions de \hat{r}_0 . NB : réellement, les axes de ce graphe sont $asinh(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.	21
2.5	Diagramme de phase d'un cercle. $\hat{r}_0 \in]0.69, 1.1[\cup]1.1, \infty[$. NB : Les axes de ce graphe sont $asinh(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.	22
2.6	Diagramme de phase d'un cercle ($\hat{\alpha} > 0$). $\hat{r}_0 \in]0.69, 1.1[\cup]1.1, \infty[$. NB : réellement, les axes de ce graphe sont $asinh(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.	23

2.7	Résultats expérimentaux en utilisant le terme géométrique : la première colonne montre le contour initial, et les autres montrent l'évolution de ce dernier par la descente de gradient pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS.	24
3.1	Paramétrisation d'une barre.	27
3.2	Les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C . Les paramètres d , ϵ et λ_C sont fixés à 1.	31
3.3	Représentation graphique des positions des extrémums de l'énergie $e_0(w_0)$ en fonction du paramètre β_C pour $\alpha_C = 1$. La courbe continue correspond au minimum et celle en pointillée correspond au maximum de l'énergie. Les paramètres d , ϵ et λ_C sont fixés à 1.	32
3.4	Représentation des quatre régions possibles relatives au changement de signe des fonctions \hat{G}_+ et \hat{G}_- . L'origine est situé en haut et à gauche. La valeur de \hat{w}_0 est comprise entre 0 et 2.	35
3.5	Les bornes inférieures et supérieures du paramètre \hat{a} colorées respectivement en bleue et en rouge.	36
3.6	Diagramme de phase d'une portion d'une barre longue. $\hat{w}_0 \in]0.8802, 0.928[\cup]0.928, 1.3004[$. Les axes de ce graphe sont $asinh(\hat{a})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 3.9 pour la lisibilité du résultat.	36
3.7	Résultats expérimentaux en utilisant le terme géométrique : la première colonne montre le contour initial, et les autres montrent l'évolution de ce dernier par la descente de gradient pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS.	38

Introduction

Nous nous intéressons dans l'introduction à l'image et au traitement d'image et nous abordons la problématique générale de la reconnaissance d'objets dans une scène. Nous présentons également le propos et l'articulation de ce travail.

Une image est une représentation d'un univers composé de plusieurs entités. Une image de télédétection peut contenir par exemple des routes, des bâtiments, des arbres, des fleuves, des lacs ; cellules, molécules, microtubules, bactéries dans une image de biologie ; organes, vaisseaux dans une image médicale ; tables, personnes, fleurs dans une image naturelle...

Le traitement d'images et la reconnaissance d'objets

Le traitement d'images a commencé à être étudié dans les années 1920 pour la transmission d'images, et juste après la fin de la seconde guerre mondiale le traitement de signal a vu le jour avec l'arrivée du RADAR. A partir de 1960, le traitement d'images a eu lieu avec un véritable essor avec l'arrivée de l'ordinateur. Pendant cette période les chercheurs ont focalisé leurs travaux surtout sur l'amélioration d'images puisque les images acquises sont généralement de mauvaise qualité et volumineuses, ce qui permet aussi de s'intéresser à la compression d'images en vue de les archiver. Très vite, il est apparu nécessaire d'interpréter les images et l'analyse de scènes est devenue un aspect essentiel du traitement. Comment comprendre les images, analyser leur contenu, stocker l'information utile, traiter le nombre grandissant d'images dans les diverses applications ? Les premiers travaux d'analyse de scènes ont concerné l'extraction de primitives. Mais pour comprendre les images, il faut avant tout reconnaître les objets présents dans celles-ci. Se pose alors la question de comment définir ces objets que l'on souhaite reconnaître. Par leur couleur, leur forme ? Est-ce suffisant ? Les premiers modèles de segmentation voient le jour. Initialement, les modèles proposés détectent les changements rapides de contraste dans l'image, les ombres et les lumières, les régions homogènes en intensité, couleur, ou texture. Mais ces informations qui sont fondées sur le niveau de gris d'un pixel (ou ses composantes couleurs), ou bien sur une texture locale ignorent l'information essentielle qu'est la géométrie de l'objet à extraire. En effet, pour la tâche difficile qu'est la reconnaissance d'objets dans une image, les informa-

tions sur la couleur, le contraste, la texture, que nous qualifierons de photométriques, sont nécessaires, mais sont seulement capables de définir un objet simple dans un environnement simple. Si la scène de l'image devient complexe, ce qui est généralement le cas des images réelles, ces informations sont insuffisantes pour définir correctement l'objet recherché.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à la reconnaissance d'objets en se basant sur l'attribut **forme** des objets qu'on souhaite les reconnaître. Dans la littérature, plusieurs approches et méthodes ont été adoptées pour la modélisation de la forme des objets présents dans les images. On adoptera dans ce travail une approche variationnelle pour la modélisation de la forme des objets en vue de la segmentation d'images de télédétection. Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre ce problème depuis plusieurs années et jusqu'à nos jours qui se basent essentiellement sur les équations différentielles partielles qui permettent de décrire la forme des objets présents dans des images. Une des grandes inventions en ce sujet de modélisation de la forme est les contours actifs, qui ont vu le jour avec Kass et al. (1988) qui sont associés à des algorithmes simples et rapides. Nous nous intéresserons dans ce travail à la nouvelle génération des contours actifs appelée Contours Actifs d'Ordre Supérieur (CAOS) développée par Rochery et al. (2005, 2006), en vue de l'extraction des réseaux routiers et des arbres présents dans des images de télédétection aussi bien aériennes que satellitaires.

Contributions et articulation de ce travail

En se basant sur la méthodologie bayésienne, l'énergie d'un contour peut être écrite comme la somme d'une énergie géométrique (l'information d'*a priori* sur la géométrie du contour) et d'une énergie liée aux données (terme d'attache aux données). Des travaux antérieurs ont montré que le modèle des CAOS présente une information d'*a priori* sophistiquée pour la modélisation de forme des objets par rapport aux modèles des contours actifs classiques (de premier ordre).

Des résultats expérimentaux ont montré que le modèle des CAOS permet aussi bien l'extraction des réseaux routiers qui seront assimilés à plusieurs portions d'une *barre longue* (dans ce travail on considérera le modèle d'une barre de longueur infinie pour négliger l'effet des extrémités), que la détection des arbres qui correspond au modèle de *gaz de cercles*. Mais il s'est avéré que le modèle des CAOS présente des instabilités au niveau du problème de minimisation de l'énergie d'un contour. La contribution de ce travail est donc l'analyse de la stabilité du modèle des CAOS en déterminant le diagramme de phase permettant de chercher les valeurs des paramètres du modèle assurant un minimum de l'énergie aussi bien pour le modèle de gaz de cercles que pour le modèle d'une barre de longueur infinie.

Ce rapport est organisé de la façon suivante :

- Dans le **chapitre 1**, nous introduisons la méthodologie des contours actifs classique et quelques travaux proposés dans ce cadre pour introduire des informations sur la forme des objets à détecter dans les modèles ; nous présentons également la nouvelle

classe de contours actifs d'ordre supérieur et une énergie quadratique particulière ; pour terminer par la problématique de ce travail.

- Le **chapitre 2** présente l'analyse de stabilité du modèle de gaz de cercles basé sur les CAOS pour la détermination de son diagramme de phase en vue de l'extraction des arbres présents dans des images aussi bien aériennes que satellitaires.
- Nous abordons dans le **chapitre 3** l'analyse de stabilité du modèle d'une barre de longueur infinie basé sur les CAOS pour la détermination de son diagramme de phase en vue de l'extraction des réseaux routiers présents dans les images de télédétection.

Chapitre 1

État de l'art des contours actifs

Dans ce chapitre, nous proposons un bref résumé des techniques classiques de contours actifs pour le traitement d'images, et plus précisément pour l'extraction d'objet(s) dans des images. Puis, nous présentons une méthode de minimisation des fonctionnelles énergétiques. Enfin, nous nous intéressons aux techniques existantes proposées dans le cadre des contours actifs d'ordre supérieur, qui permettent d'introduire dans le modèle de l'information a priori sur la forme du ou des objets que l'on souhaite détecter, une information forte et sophistiquée afin de permettre une extraction robuste. Nous concluons par la présentation de la problématique de notre travail.

1.1 Approche probabiliste-approche variationnelle

L'identification d'une région R qui correspond à une ou plusieurs entités dans la scène, dans le domaine image Ω , est un des problèmes principaux du traitement d'images et de la vision par ordinateur. Pour résoudre ce problème, on peut construire implicitement une distribution de probabilité *a posteriori* $P(R|I, K)$, dans l'espace des régions, qui dépend des données de l'image I et des connaissances *a priori* K sur la région ou sur sa relation avec les données de l'image. Cette distribution de probabilité permet d'estimer la région en question.

Concrètement, les connaissances *a priori* K sont cruciales. En effet, elles contribuent dans la définition de la probabilité de *vraisemblance* des données, $P(I|R, K)$, et sur la probabilité *a priori* $P(R|K)$ obtenues par la décomposition de Bayes de la probabilité *a posteriori* $P(R|I, K)$. L'estimateur **Maximum A Posteriori** (MAP) joue un rôle très important dans plusieurs domaines d'applications pour sa simplicité et son efficacité. On adoptera donc cet estimateur pour la résolution du problème d'estimation pour la segmentation d'images en

régions. L'estimateur MAP est donné par :

$$\hat{R} = \arg \max_{R \in \mathcal{R}} P(R|I, K) . \quad (1.1)$$

où \mathcal{R} est l'ensemble de toutes les régions possibles dans le domaine image Ω .

En utilisant la formule de Bayes, la distribution de probabilité *a posteriori* peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(R|I, K) \propto P(I|R, K)P(R|K) , \quad (1.2)$$

et l'équation 1.1 devient donc :

$$\hat{R} = \arg \max_{R \in \mathcal{R}} P(I|R, K)P(R|K) . \quad (1.3)$$

On peut définir intuitivement une énergie relative à chaque distribution de probabilité en réécrivant cette dernière sous la forme d'une exponentielle, et en appliquant le logarithme négatif ; l'équation 1.3 sera donc :

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \arg \max_{R \in \mathcal{R}} \{ \exp(-E(I|R, K)) \exp(-E(R|K)) \} \\ &= \arg \min_{R \in \mathcal{R}} \{ E(I|R, K) + E(R|K) \} . \end{aligned} \quad (1.4)$$

On peut donc définir deux types d'énergies :

1. Une énergie d'*a priori*, $E(R|K)$, qui joue un rôle très important pour la régularisation des données. Cette énergie représente l'énergie interne de la région (ou l'énergie géométrique dans le cas de modélisation de forme) qui sera notée E_g .
2. Une énergie de *vraisemblance*, $E(I|R, K)$ qui représente le terme d'attache aux données. Cette énergie représente l'énergie externe de la région (ou l'énergie image puisqu'elle est liée aux données) qui sera notée E_i .

L'énergie totale à minimiser sera donc la somme de l'énergie interne et de l'énergie externe. Cette énergie peut être assimilée à une énergie *a posteriori* donnée par cette équation :

$$\begin{aligned} E(R|I, K) &= E(R|K) + E(I|R, K) , \\ E &= E_g + E_i . \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.2 Les contours actifs

Les premiers travaux des contours actifs ont été introduits par Kass et al. (1988) en vue de l'extraction des objets présents dans des images. Ils sont associés à des algorithmes simples et rapides en modélisation de forme. L'idée est de définir une fonctionnelle énergétique sur l'espace des courbes dans le domaine de l'image ; ensuite on cherchera le minimum de cette fonctionnelle qui délinéera les objets en question présents dans l'image.

On considère *contour* notre contour et I l'image en question qui est définie dans l'ensemble Ω de \mathbb{R}^2 . Kass et al. (1988) ont défini la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} E(\gamma) &= E_{\text{interne}}(\gamma) + E_{\text{image}}(\gamma; I) \\ &= \int_{\square_\gamma} \{ \alpha |\dot{\gamma}(t)|^2 + \beta |\ddot{\gamma}(t)|^2 \} dt - \int_{\square_\gamma} |\nabla I(\gamma(t))|^2 dt . \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec $\square\gamma$ est le domaine de définition de l'application γ , $\dot{\gamma}(t)$ le vecteur tangent à la courbe, $|\ddot{\gamma}(p)|$ la courbure et $\nabla I(\gamma(t))$ le gradient de l'image ; $\gamma(t)$ est un point du contour γ . L'énergie interne joue un rôle très important en modélisation de forme du contour. Elle incorpore les connaissances *a priori* sur la géométrie du contour et a un effet régularisant pour que le contour reste lisse. L'énergie image représente la vraisemblance des données observées. Elle est exprimée dans le modèle défini par Kass et al. (1988) en fonction de l'amplitude du gradient de l'image qui permet d'évoluer les points du contour vers les points de l'image de gradients forts. Ce modèle d'énergie présente un inconvénient ce qu'il n'est pas invariant à la paramétrisation.

La fonctionnelle définie par Kass et al. (1988) est sensible au choix du contour initial. Cohen (1991), Cohen et Cohen (1993) modifient cette fonctionnelle énergétique en vue d'autoriser au contour de se gonfler ou de se dégonfler. L'idée est d'ajouter au modèle précédent la contribution d'une force, définie comme une pression (positive ou négative), permettant ses deux mouvements au contour. Cette force, appelée force « ballon », peut être vue comme une quantité d'aire ajoutée au modèle initial qui améliore la stabilité du contour surtout au niveau de la flexibilité du choix du contour initial.

(Caselles et al., 1993, Kichenassamy et al., 1995, Malladi et al., 1995, Caselles et al., 1997, Sapiro, 2001) introduisent une nouvelle famille des contours actifs, les contours actifs « géométriques » ou « géodésiques », qui remédie au problème de reparamétrisation dont souffrent les premiers modèles. Ils définissent une nouvelle fonctionnelle exprimée en fonction de la longueur du contour :

$$E(\gamma) = \int_{\square\gamma} g(|\nabla I(\gamma(t))| |\dot{\gamma}(t)|) dt, \quad (1.7)$$

où $g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive monotone strictement décroissante qui tend vers 0 à l'infini.

Une autre famille de fonctionnelles énergétiques est introduite par Chan et Vese (2001), Paragios et Deriche (2000, 2002a, b), Jehan-Besson et al. (2003), Ben Ayed et al. (2006) qui incorpore dans le modèle des propriétés d'homogénéité des régions. L'idée est de définir l'énergie comme l'intégrale sur la région intérieure ou extérieure au contour et sur le contour lui-même. Ce type d'énergie est appelé énergie de type régions alors que les premiers modèles sont dites de type contours.

En littérature, les fonctionnelles simples les plus utilisées sont la longueur du contour L et son aire intérieure A puisqu'elles sont invariantes par translation et par rotation. Un exemple d'énergie géométrique du contour peut être définie comme :

$$E_g(\gamma) = L(\gamma) + \alpha A(\gamma), \quad (1.8)$$

avec

$$L(\gamma) = \int_{\square\gamma} |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad (1.9)$$

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{\square\gamma} \dot{\gamma}(t) \times \gamma(t) dt. \quad (1.10)$$

Grâce au théorème de Green-Riemann, une fonctionnelle simple sur une région R peut être réécrite avec une intégrale simple sur la frontière de cette région. N'importe quelle énergie de la forme $\int_R F$, où R est une région du plan, peut alors se réécrire comme :

$$\int_R F(x, y, R) dx dy = \int_{\partial R} \nabla u \cdot \mathbf{n} da(x, y), \quad (1.11)$$

et, si ∂R est paramétrisé par une fonction C^2 , $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, telle que lorsque le paramètre t varie de 0 à 1, le bord de la région ∂R est parcouru entièrement dans le sens direct, on obtient :

$$\int_R F(x, y, R) dx dy = \int_{\square\gamma} \nabla u \cdot \mathbf{n} |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad (1.12)$$

avec u la solution unique de l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } R, \\ u|_{\partial R} = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

En conclusion, la plupart des fonctionnelles énergétiques simples de la littérature, basées régions ou basées contours, peuvent être écrites sous cette forme :

$$E(\gamma) = \int_{\square\gamma} \|\dot{\gamma}(t)\|_g f(\gamma(t)) dt, \quad (1.14)$$

où $\|v\|_g$ représente la norme du vecteur v dans la métrique g .

En reconnaissance d'objets, on ne connaît pas *a priori* la position de l'objet que nous recherchons, donc on a intérêt à définir une fonctionnelle d'énergie *a priori* invariante aux transformations cartésiennes : translation et rotation. Par conséquent, il ne reste plus que deux fonctionnelles simples possibles : la longueur du contour et son aire intérieure. Pour dépasser cette contrainte, Rochery et al. (2005, 2006) ont proposé une nouvelle forme de fonctionnelle énergétique qui permet d'intégrer une information plus complexe sur la forme de l'énergie géométrique. Dans ce qui suit, on s'intéressera à ce type de fonctionnelles appelées fonctionnelles d'ordre supérieur.

1.3 Les contours actifs d'ordre supérieur : CAOS

Contrairement aux fonctionnelles des contours actifs classiques qui présentent une interaction locale (l'énergie s'exprime en fonction du gradient en un point du contour), les

CAOS permettent une interaction de longue portée entre un nombre de points du contour arbitraire, elles sont exprimées par des intégrales multiples sur le contour.

La forme générale d'une telle fonctionnelle est donnée à l'ordre n par :

$$E(\gamma) = \int_{(\gamma)^n} F . \quad (1.15)$$

Ce type de fonctionnelles permet de définir une énergie géométrique de la forme plus sophistiquée que celle apportée par les fonctionnelles linéaires. Rochery et al. (2005, 2006) ont étudié en détail le cas des contours actifs quadratique, c'est à dire le cas de fonctionnelle quadratique donnée par :

$$E(\gamma) = \int_{(\gamma)^2} F . \quad (1.16)$$

qui peut être toujours réécrite sous cette forme :

$$E(\gamma) = \iint_{(\square\gamma)^2} \dot{\gamma}(t) \cdot F(\gamma(t), \gamma(t')) \cdot \dot{\gamma}(t') dt dt' . \quad (1.17)$$

avec F est une application de $\Omega \times \Omega$ vers les matrices 2×2 . Cet opérateur F permet de définir une interaction non triviale entre les différents points du contour. Contrairement aux énergies avec une intégrale simple qui ne permettent de définir qu'une interaction locale (c'est-à-dire ponctuelle, ou alors dans un voisinage de dimension fixée par l'intermédiaire des dérivées), cette interaction non locale donne toute sa puissance au modèle.

1.4 Energie géométrique du modèle des CAOS

En combinant les fonctionnelles linéaires (la longueur du contour et l'aire de la région limitée par ce dernier) qui sont invariantes aux transformations cartésiennes et le terme quadratique donné par l'équation 1.17, Rochery et al. (2005, 2006) ont défini une énergie géométrique du contour γ fondée sur le modèle des CAOS comme :

$$E_g(\gamma) = \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} \iint dt dt' \dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t') \Phi(R(t, t')) . \quad (1.18)$$

avec λ_C , α_C et β_C sont les paramètres du modèle relatives respectivement à la longueur du contour $L(\gamma)$, à l'aire de la région interne du contour $A(\gamma)$ et au terme quadratique. La fonction Φ définit le degré d'interaction entre deux points $\gamma(t)$ et $\gamma(t')$ séparés d'une distance $R(t, t') = |\gamma(t) - \gamma(t')|$.

Rochery et al. (2005, 2006) ont choisi une fonction d'interaction Φ donnée par :

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 & z < d - \epsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z-d}{\epsilon} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi(z-d)}{\epsilon} \right) & d - \epsilon \leq z < d + \epsilon, \\ 0 & z \geq d + \epsilon. \end{cases} \quad (1.19)$$

L'allure de la fonction Φ est donnée par la figure 1.1. Le degré d'interaction entre deux points du contour dépend de la distance qui les sépare : plus les points sont proches, plus le degré d'interaction est fort et inversement plus la distance est grande, plus l'interaction est faible.

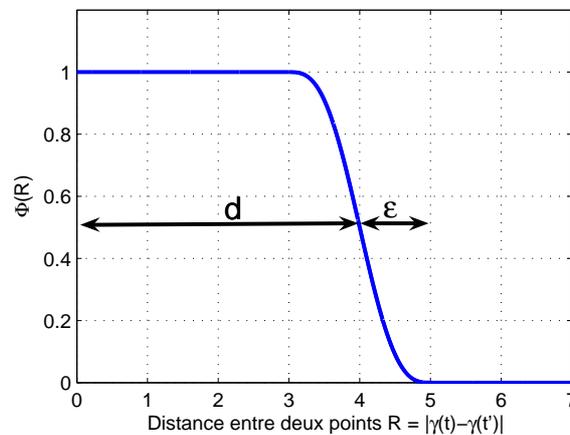


FIG. 1.1 – Représentation graphique de la fonction d'interaction Φ . d et ϵ sont les deux paramètres de Φ .

Le modèle des CAOS donné par l'équation 1.18 favorise deux configurations géométriques (voir la figure 1.2) : deux points du contour qui ont des vecteurs tangents parallèles, donc le produit scalaire $\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t')$ est maximal, s'attirent ; et deux points du contour qui ont des vecteurs tangents anti-parallèles se repoussent.

1.5 Minimisation de l'énergie : algorithme de descente de gradient

Après avoir défini le modèle énergétique, il est nécessaire de trouver le minimum de l'énergie, qui délinéera le contour du ou des objet(s) en question présents dans l'image. Plusieurs algorithmes d'optimisation permettent de résoudre ce problème tels que la descente de gradient, le recuit simulé...

Rochery et al. (2005, 2006) ont détaillé le calcul de minimisation de l'énergie donnée par l'équation 1.18 en utilisant l'algorithme de descente de gradient. Les calculs des équations d'Euler-Lagrange à partir de l'énergie géométrique du contour, permettent d'avoir une

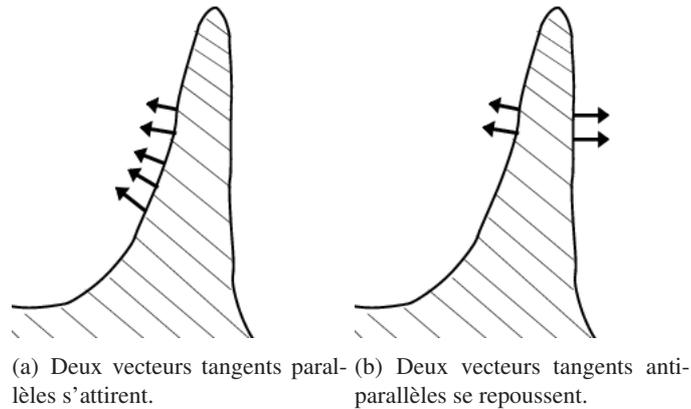


FIG. 1.2 – Les deux configurations géométriques favorisées par le modèle des CAOS donné par l'équation 1.18.

expression explicite de l'équation, $\frac{\delta E_g}{\delta \gamma} = 0$, qu'on souhaite la résoudre en définissant une nouvelle variable temporelle, t , et en se basant sur l'équation d'évolution de l'algorithme de descente de gradient : $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\delta E_g}{\delta \gamma}$. Le contour minimisant l'énergie géométrique est obtenu en annulant la quantité $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ qui représente le gradient du contour. Nous sommes confrontés donc à un problème de minimisation d'une fonctionnelle énergétique, dont on analysera tout au long de ce travail la stabilité de la solution.

1.6 Problématique

Des expériences ont été faites sur l'évolution des contours en utilisant l'algorithme de descente de gradient pour la minimisation de l'énergie géométrique du contour donnée par l'équation 1.18. La figure 1.3 montre les trois évolutions possibles du même contour initial (un rectangle arrondi) par la descente de gradient. Les lignes de la figure correspondent à des valeurs différentes des paramètres du modèle des CAOS (λ_C , α_C et β_C) et les colonnes montrent les évolutions du contour initial par la descente de gradient.

Les valeurs des paramètres correspondantes à la première ligne montre que l'évolution du contour initial par la descente du gradient finira à disparaître le contour et donc l'énergie géométrique donnée par l'équation 1.18 n'admet pas de minimums pour ses valeurs de paramètres ; dans ce cas le contour initial est instable.

La deuxième ligne de la figure 1.3 montre l'évolution de l'algorithme de descente de gradient pour d'autres valeurs des paramètres du modèle des CAOS, on observe la création des bras liés par des jonctions à leurs extrémités. Ceci s'explique par le fait que l'énergie d'une portion d'un bras est négative et donc théoriquement l'algorithme de descente de gradient crée des bras indéfiniment, ce qui n'est pas le cas en pratique parce que le domaine image est fini ; c'est pour cette raison que le nombre de bras est limité.

La troisième ligne correspond à l'évolution du contour pour des valeurs des paramètres

permettant d'avoir des formes circulaires. Ceci s'explique par le fait que l'énergie d'un cercle est négative, et donc l'énergie de deux cercles est inférieur à celle d'un seul cercle et en conséquence l'algorithme de descente de gradient favorise la création de plusieurs cercles stables, et parce que le domaine de l'image est fini, le nombre de cercles stables est fini.

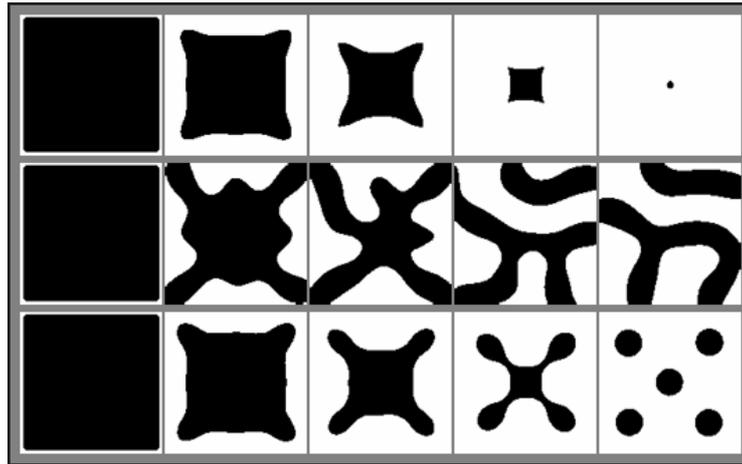


FIG. 1.3 – Evolution d'un contour initial (un rectangle arrondi) pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS donné par l'équation 1.18 en utilisant l'algorithme de la descente du gradient.

Le modèle des CAOS donné par l'équation 1.18 présente donc une instabilité au sens où, en modifiant seulement les valeurs des paramètres λ_C , α_C et β_C , la descente de gradient permet d'avoir un contour minimisant l'énergie de forme aussi bien circulaire que linéique et éventuellement il existe une gamme des valeurs des paramètres où l'énergie géométrique du contour n'admet pas de minimum.

L'objectif de mon travail consiste donc à déterminer les gammes des valeurs des paramètres λ_C , α_C et β_C qui permettent d'avoir :

- un minimum de l'énergie $E_g(\gamma)$,
- un ou plusieurs cercle(s) stable(s), c'est à dire les gammes des valeurs des paramètres qui donnent une énergie d'un cercle négative ou positive,
- une barre stable ou plusieurs bras stables, c'est à dire les gammes des valeurs des paramètres qui donnent une énergie d'une portion d'un bras négative ou positive.

1.7 Invariance d'échelle du modèle des CAOS

L'énergie géométrique du contour E_g dépend de cinq paramètres : λ_C , α_C , β_C , et les deux paramètres de la fonction d'interaction Φ , ϵ et la distance d . Pour simplifier l'analyse de la stabilité, on prendra $\epsilon = d$ en vue d'exprimer la fonction d'interaction Φ en fonction du rapport $\hat{\gamma} = \frac{\gamma}{d}$ qui représente le contour par unité de longueur, qui correspond à un

changement d'échelle. L'énergie E_g devient donc :

$$E_g(\hat{\gamma}) = \lambda_C d L(\hat{\gamma}) + \alpha_C d^2 A(\hat{\gamma}) - \frac{\beta_C}{2} d^2 \iint dt dt' \dot{\hat{\gamma}}(t) \dot{\hat{\gamma}}(t') \phi(|d\hat{\gamma}(t) - d\hat{\gamma}(t')|),$$

En posant $\tilde{\lambda} = \lambda_C d$, $\tilde{\alpha} = \alpha_C d^2$, $\tilde{\beta} = \beta_C d^2$ et $\hat{\Phi}(\hat{\gamma}) = \Phi(d\hat{\gamma})$, l'équation 1.20 devient :

$$\begin{aligned} E_g(\hat{\gamma}) &= \tilde{\lambda} L(\hat{\gamma}) + \tilde{\alpha} A(\hat{\gamma}) - \frac{\tilde{\beta}}{2} \iint dt dt' \dot{\hat{\gamma}}(t) \dot{\hat{\gamma}}(t') \hat{\phi}(|\hat{\gamma}(t) - \hat{\gamma}(t')|) \\ &= \tilde{\lambda} \left[L(\hat{\gamma}) + \hat{\alpha} A(\hat{\gamma}) - \frac{\hat{\beta}}{2} \iint dt dt' \dot{\hat{\gamma}}(t) \dot{\hat{\gamma}}(t') \hat{\phi}(|\hat{\gamma}(t) - \hat{\gamma}(t')|) \right], \end{aligned}$$

avec $\hat{\alpha} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\lambda}} = \frac{\alpha_C d}{\lambda_C}$ et $\hat{\beta} = \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\lambda}} = \frac{\beta_C d}{\lambda_C}$. En définissant une nouvelle énergie $\hat{E}_g(\hat{\gamma}) = \frac{E_g(\hat{\gamma})}{\tilde{\lambda}}$, on aura :

$$\hat{E}_g(\hat{\gamma}) = L(\hat{\gamma}) + \hat{\alpha} A(\hat{\gamma}) - \frac{\hat{\beta}}{2} \iint dt dt' \dot{\hat{\gamma}}(t) \dot{\hat{\gamma}}(t') \hat{\phi}(|\hat{\gamma}(t) - \hat{\gamma}(t')|). \quad (1.20)$$

L'analyse de stabilité du modèle géométrique des CAOS donné par l'équation 1.18 sera donc équivalente à celle de l'énergie \hat{E}_g donnée par l'équation 1.20. Pour assurer cette équivalence, le paramètre λ_C doit être **strictement positif** qui sera une première contrainte sur le paramètre contrôlant la longueur du contour $L(\gamma)$. L'analyse d'optimisation de l'énergie sera donc plus facile puisque seulement deux paramètres, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, qui contribuent à la minimisation de l'énergie et la problématique de ce travail se résume à la détermination du **diagramme de phase** qui représente la ou les région(s) du plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ satisfaisant les conditions de stabilité données dans la section précédente.

Nous proposons pour l'analyse de la stabilité de l'énergie géométrique du contour une étude variationnelle fondée sur le développement de l'énergie en série de Taylor jusqu'au second ordre, au voisinage du contour initial γ_0 , donné par l'équation suivante :

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) = E_g(\gamma_0) + \langle \delta\gamma | \frac{\delta E_g}{\delta\gamma} \rangle_{\gamma_0} + \frac{1}{2} \langle \delta\gamma | \frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2} | \delta\gamma \rangle_{\gamma_0}. \quad (1.21)$$

avec $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une métrique définie sur l'espace des contours et $\delta\gamma$ est une variation élémentaire du contour. Un contour γ_0 est stable (c'est à dire un minimum de l'énergie E_g) s'il satisfait les deux conditions suivantes : $\frac{\delta E_g}{\delta\gamma} |_{\gamma_0} = 0$ et $\frac{\delta^2 E_g}{\delta\gamma^2} |_{\gamma_0} > 0$. Ses deux conditions permettrons de contraindre les valeurs des paramètres du modèle des CAOS.

1.8 Conclusion

Nous avons présenté tout au long de ce chapitre les principales techniques fondées sur les contours actifs aussi bien classiques depuis les années quatre vingt que d'ordre supérieur étudiés ses dernières années ; qui ont été largement utilisé en reconnaissance de forme des objets présents dans des images naturelles et de télédétection. Nous aborderons dans les chapitres suivants l'analyse de stabilité du modèle des CAOS pour l'extraction des réseaux routiers et de la détection des arbres en imagerie de télédétection.

Chapitre 2

Diagramme de phase du modèle de gaz de cercles

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité du modèle de gaz de cercles fondé sur les CAOS. En première étape, nous présentons les calculs détaillés de stabilité d'un cercle développés par Horvath et al. (2006a, b). Ensuite, nous nous intéressons à l'analyse de la stabilité d'un cercle en vue de la détermination du diagramme de phase définissant la ou les région(s) du plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ permettant d'avoir un cercle stable.

2.1 L'énergie géométrique d'un cercle

Dans cette partie, le contour initial γ_0 représente un cercle donc c'est plus commode de l'exprimer dans le système des coordonnées polaires, r et θ , dans le domaine image Ω . En choisissant un système de coordonnées adéquat sur l'ensemble S^1 , un cercle de rayon r_0 centré dans la région est défini par $\gamma_0(t) = (r_0(t), \theta_0(t))$, où $r_0(t) = r_0$, $\theta_0(t) = t$ et $t \in [-\pi, \pi[$. On s'intéressera dans ce qui suit, du comportement des petites perturbations, $\delta\gamma = (\delta r, \delta\theta)$, du cercle initial γ_0 . Les changements tangentiels du cercle n'ont pas une influence sur la valeur de son énergie. On aura donc $\delta\theta = 0$ et on s'intéressera seulement aux perturbations selon la composante radiale, δr .

L'énergie E_g est invariante par translation sur le contour γ , qui est paramétré par la variable t , donc les différents termes d'intégration dans l'expression de E_g donnée par l'équation 1.18 s'expriment seulement en fonction de $t - t'$. Par conséquent, la dérivée seconde de l'énergie $\delta^2 E_g / \delta^2 \gamma$, qui est la matrice hessienne de E_g , est invariante par translation donc elle peut être diagonalisée dans la base de Fourier de l'espace tangent à γ_0 . En exprimant les perturbations δr en fonction de ses composantes dans la base de Fourier, on aura l'ex-

pression suivante :

$$\delta r(t) = \sum_k a_k e^{ir_0 k t}, \quad (2.1)$$

avec a_k est la composante de Fourier de fréquence $k \in \{m/r_0 : m \in \mathbb{Z}\}$. La longueur et l'aire du contour γ sont données jusqu'au second ordre par :

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} dt |\tau(t)| = 2\pi r_0 \left\{ 1 + \frac{a_0}{r_0} + \frac{1}{2} \sum_k k^2 |a_k|^2 \right\} \quad (2.2)$$

$$A(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr' r' = \pi r_0^2 + 2\pi r_0 a_0 + \pi \sum_k |a_k|^2. \quad (2.3)$$

L'apparition du facteur k^2 dans l'expression de la longueur du contour L correspond à la même dépendance de la fréquence dans le cas du modèle Laplacien. Ceci montre que le terme de la longueur joue le rôle du lissage pour les perturbations du contour. Par contre les perturbations de Fourier dans le terme de l'aire du contour, A , apparaît comme un bruit blanc. Les calculs de stabilité d'un cercle sont détaillés en annexe A.

Le terme quadratique de l'énergie géométrique est donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \tau(t') \cdot \tau(t) \Phi(R(t, t')) &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{00}(p) + 4\pi a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{10}(p) \\ &+ \sum_k 2\pi |a_k|^2 \left\{ \left[2 \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{20}(p) + \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 k p} F_{21}(p) \right] \right. \\ &\left. - \left[2ir_0 k \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 k p} F_{23}(p) \right] + \left[r_0^2 k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 k p} F_{24}(p) \right] \right\}, \quad (2.4) \end{aligned}$$

En combinant les équations (2.2), (2.3) et (2.4), on trouve la fonction d'énergie (1.18) jusqu'à l'ordre 2 :

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) \approx e_0(r_0) + a_0 e_1(r_0) + \frac{1}{2} \sum_k |a_k|^2 e_2(k, r_0), \quad (2.5)$$

avec :

$$e_0(r_0) = 2\pi\lambda_C r_0 + \pi\alpha_C r_0^2 - \pi\beta_C G_{00}(r_0), \quad (2.6)$$

$$e_1(r_0) = 2\pi\lambda_C + 2\pi\alpha_C r_0 - 2\pi\beta_C G_{10}(r_0), \quad (2.7)$$

$$e_2(k, r_0) = 2\pi\lambda_C r_0 k^2 + 2\pi\alpha_C - 2\pi\beta_C G_2(k, r_0), \quad (2.8)$$

$$G_2(k, r_0) = 2G_{20}(r_0) + G_{21}(k, r_0) - 2ir_0 k G_{23}(k, r_0) + r_0^2 k^2 G_{24}(k, r_0). \quad (2.9)$$

où $G_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0(1-\delta(j))kp} F_{ij}(p)$. Notant que dans le terme quadratique, les termes non diagonaux liant a_k et $a_{k'}$ disparaissent pour $k \neq k'$: la base de Fourier diagonalise le terme de second ordre.

2.2 Stabilité d'un cercle

L'équation 2.5 donne le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie géométrique du contour γ au voisinage d'un cercle γ_0 de rayon r_0 . Notre objectif est de déterminer le cercle, s'il existe, qui minimise cette énergie, donc le cercle qui annule l'énergie du premier ordre, $e_1(r_0)$, et qui donne une énergie de second ordre, $e_2(k, r_0)$, strictement positive $\forall k$.

2.2.1 Analyse des différents comportements de l'énergie d'un cercle, $e_0(r_0)$

La minimisation de l'énergie E_g revient à minimiser le terme constant de l'équation 2.5, $e_0(r_0)$, puisque le terme de premier ordre est nul et celui de second ordre est strictement positif évalué au minimum de l'énergie. La figure 2.1 montre les différents comportements de l'énergie $e_0(r_0)$ en fonction du rayon r_0 pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C . Les figures 2.1(d), 2.1(e) et 2.1(f) montrent que pour les valeurs des paramètres correspondantes, l'énergie $e_0(r_0)$ n'admet pas de minima. La courbe de $e_0(r_0)$ donnée par les figures 2.1(d) et 2.1(e) possède un point d'inflexion : pour la figure 2.1(d) le point d'inflexion admet une dérivée nulle, donc le terme du premier ordre de l'équation 2.5, $e_1(r_0)$, est nul, alors que celui de la figure 2.1(e) admet une dérivée quelconque. La figure 2.1(f) montre que pour une valeur négative du paramètre α_C , l'énergie admet un extrémum et plus précisément un maximum et elle tend vers $-\infty$ pour les grandes valeurs de r_0 . L'expression de $e_0(r_0)$ donnée par l'équation 2.6 justifie le type de comportement de la figure 2.1(f) : la fonction $G_{00}(r_0)$ tend vers une constante pour les grandes valeurs de r_0 à cause de la fonction d'interaction Φ qui apparaît dans l'expression de $G_{00}(r_0)$, donc $e_0(r_0)$ sera dominée par $\pi\alpha_C r_0^2$ et ce qui nous amène à contraindre la valeur du paramètre α_C d'être **strictement positive** car sinon $e_0(r_0)$ tendra vers $-\infty$ pour les grandes valeurs de r_0 et dans ce cas l'énergie $e_0(r_0)$ n'admet pas de minimum global.

Pour les valeurs des paramètres du modèle relatives aux figures 2.1(a), 2.1(b) et 2.1(c), l'énergie $e_0(r_0)$ admet deux extrémums : un minimum et un maximum. Le terme de second ordre de l'équation 2.5, $e_2(k, r_0)$, permet de discerner ses deux extrémums : si $e_2(k, r_0) > 0$ pour tout k , alors cet extrémum correspond à un minimum et si $e_2(k, r_0) < 0$ pour tout k , alors il s'agit d'un maximum.

Les paramètres du modèle des CAOS relatives à la figure 2.1(a) donnent un **minimum positif** de l'énergie géométrique d'un cercle, donc l'algorithme de descente de gradient détecte un seul cercle minimisant l'énergie puisque si le nombre de cercles augmente, l'énergie augmente. Dans le cas de la figure 2.1(c) le minimum de l'énergie d'un cercle est **négatif** et donc si le nombre de cercles augmente alors l'énergie géométrique du contour, qui est l'ensemble de ses cercles, diminue. Dans ce cas l'algorithme de descente de gradient crée plusieurs cercles de nombre limité à cause de l'interaction entre eux et parce que le domaine de l'image est fini.

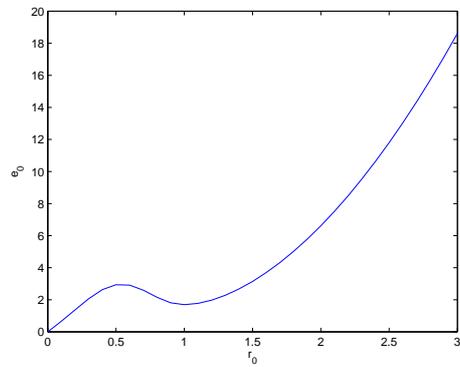
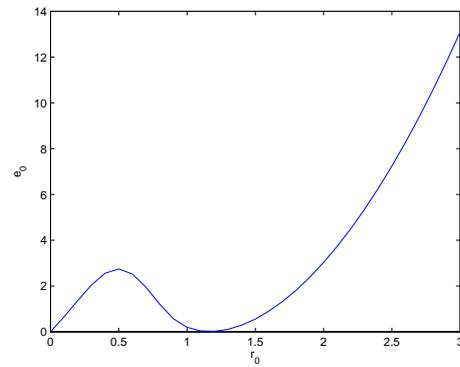
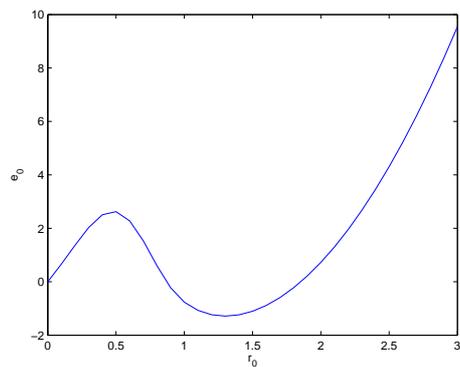
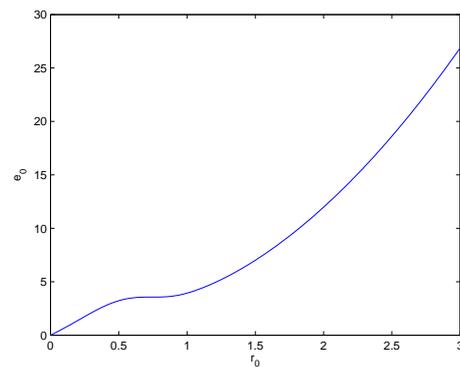
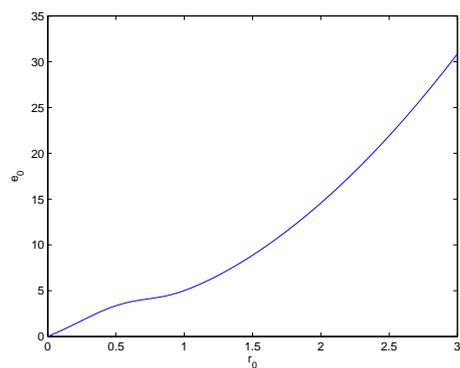
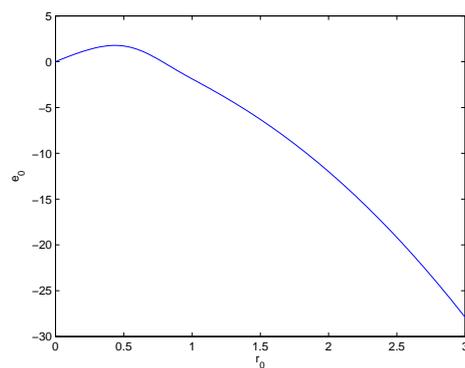
(a) $\alpha_C = 1, \beta_C = 1.54$ (b) $\alpha_C = 1, \beta_C = 1.84$ (c) $\alpha_C = 1, \beta_C = 2.03$ (d) $\alpha_C = 1, \beta_C = 1.10$ (e) $\alpha_C = 1, \beta_C = 0.88$ (f) $\alpha_C = -1, \beta_C = 1$

FIG. 2.1 – Les comportements de l'énergie $e_0(r_0)$ pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C .

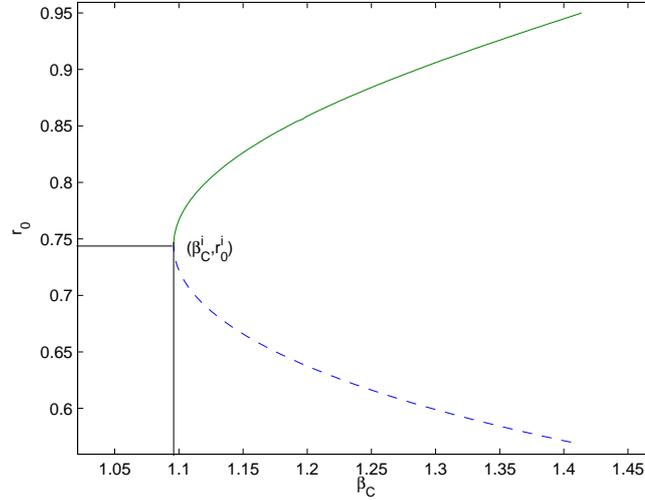


FIG. 2.2 – Représentation graphique des positions des extrémums de l'énergie $e_0(r_0)$ en fonction du paramètre β_C pour une valeur de $\alpha_C = 1$. La courbe continue correspond au minimum et celle en pointillée correspond au maximum.

2.2.2 Analyse de l'énergie du premier ordre, $e_1(r_0)$

Un cercle de rayon r_0 est un extrémum de l'énergie E_g si et seulement si l'équation $e_1(r_0) = 0$ est satisfaite, qui permet d'avoir une première contrainte sur les paramètres du modèle des CAOS (λ_C , α_C et β_C) :

$$\beta_C(\lambda_C, \alpha_C, r_0, d, \epsilon) = \frac{\lambda_C + \alpha_C r_0}{G_{10}(r_0, d, \epsilon)}. \quad (2.10)$$

En exprimant l'équation 2.10 en fonction du rayon d'un cercle par unité de longueur, $\hat{r}_0 = \frac{r_0}{d}$, et des paramètres d'échelle $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ définis dans la section 1.7, on aura la relation suivante :

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{r}_0) = \frac{1 + \hat{\alpha}\hat{r}_0}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0)}. \quad (2.11)$$

où $\hat{G}_{10}(\hat{r}_0) = \frac{1}{d}G_{10}(r_0, d, \epsilon)$ tels que $d = \epsilon$ et $\hat{r}_0 = \frac{r_0}{d}$.

La figure 2.2 montre les variations du rayon r_0 , rayon d'un cercle qui correspond à un extrémum de l'énergie E_g , en fonction du paramètre β_C pour les valeurs de $d = 1$, $\epsilon = 1$, $\lambda_C = 1$ et $\alpha_C = 1$. Cette courbe admet un point particulier (β_C^l, r_0^l) qui justifie les différents comportements de l'énergie $e_0(r_0)$ donnés par la figure 2.1. Notant que pour une valeur de r_0 choisie, il existe une valeur unique du paramètre β_C qui satisfait l'équation 2.10.

Pour $\beta_C = \beta_C^l$, les extrémums (le minimum et le maximum) seront confondus et l'énergie $e_0(r_0)$ admet un point d'inflexion au point $r_0 = r_0^l$ et donc il n'existe pas de cercle stable qui minimise l'énergie. Pour $\beta_C < \beta_C^l$, l'énergie $e_0(r_0)$ n'admet pas d'extrémums : la courbe

de l'énergie est monotone parce que l'influence du terme quadratique n'est pas assez importante par rapport à celles des termes linéaires, la longueur et l'aire du contour. Le minimum ne peut pas être situé au dessous de la valeur $r_0 = r_0^l$.

2.2.3 Analyse de l'énergie de second ordre, $e_2(k, r_0)$

Comme on a mentionné précédemment, pour que l'énergie E_g admet un cercle stable, cercle de rayon r_0 qui minimise E_g , il faut que le terme du premier ordre, $e_0(r_0)$, soit nul et le terme du second ordre $e_2(k, r_0)$ soit strictement positif $\forall k$. La première condition a été étudiée dans la section 2.2.1 et on a arrivé à une contrainte sur les paramètres du modèle donnée par l'équation 2.10. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'analyse du terme de second ordre $e_2(k, r_0)$.

L'expression de l'énergie du second ordre e_2 est donnée par l'équation 2.8 :

$$e_2(\lambda_C, \alpha_C, \beta_C, d, \epsilon, r_0, k) = 2\pi\lambda_C r_0 k^2 + 2\pi\alpha_C - 2\pi\beta_C G_2(d, \epsilon, r_0, k),$$

Une perturbation de fréquence $m = 1$ ($k = \frac{m}{r_0} = \frac{1}{r_0}$) d'un cercle engendre une simple translation de ce dernier. Or l'énergie E_g est invariante par translation donc on ignorera dans notre analyse de stabilité les perturbations de fréquence 1. La condition de stabilité de second ordre d'un cercle de rayon r_0 sera donc :

$$e_2(\lambda_C, \alpha_C, \beta_C, d, \epsilon, r_0, k) > 0, \forall k \neq \frac{1}{r_0},$$

qui sera, en utilisant la propriété de l'invariance d'échelle de l'énergie détaillée dans la section 1.7, exprimée en fonction du rayon d'un cercle stable par unité de longueur \hat{r}_0 et des deux paramètres d'échelle $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, comme :

$$\hat{e}_2(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{r}_0, k) > 0, \forall k \neq \frac{1}{r_0},$$

et puisque $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont liés par l'équation 2.11, on aura :

$$\hat{e}_2(\hat{\alpha}, \hat{r}_0, k) > 0, \forall k \neq \frac{1}{r_0},$$

ce qui donne :

$$\hat{r}_0 k^2 + \hat{\alpha} - \frac{1 + \hat{\alpha}\hat{r}_0}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0)} \hat{G}_2(\hat{r}_0, k) > 0, \forall k \neq \frac{1}{r_0},$$

En définissant les expressions suivantes : $a(\hat{r}_0, k) = 1 - \hat{r}_0 \frac{\hat{G}_2(\hat{r}_0, k)}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0, k)}$ et $f(\hat{r}_0, k) = \frac{\hat{G}_2(\hat{r}_0, k)}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0, k)} - \hat{r}_0 k^2$, la condition de stabilité de second ordre devient :

$$\hat{\alpha} a(\hat{r}_0, k) > f(\hat{r}_0, k), \forall k \neq \frac{1}{r_0},$$

La résolution de cette inéquation dépend du signe de $a(\hat{r}_0, k)$:

$$\begin{aligned} \text{si } a(\hat{r}_0, k) > 0 \text{ alors } \hat{\alpha} &> \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}, \forall k \neq \frac{1}{r_0} \text{ donc } \hat{\alpha} > \hat{\alpha}_{\min} = \max_{k \in K^+} \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}, \\ \text{si } a(\hat{r}_0, k) < 0 \text{ alors } \hat{\alpha} &< \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}, \forall k \neq \frac{1}{r_0} \text{ donc } \hat{\alpha} < \hat{\alpha}_{\max} = \min_{k \in K^-} \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}. \end{aligned}$$

avec $K^+ = \{k, a(\hat{r}_0, k) > 0 \text{ et } k \neq \frac{1}{r_0}\}$ et $K^- = \{k, a(\hat{r}_0, k) < 0 \text{ et } k \neq \frac{1}{r_0}\}$.

Les figures 2.3(a), 2.3(b) et 2.3(c) montrent respectivement les allures des fonctions $a(\hat{r}_0, k)$, $f(\hat{r}_0, k)$ et du rapport $fa = \frac{f(\hat{r}_0, k)}{a(\hat{r}_0, k)}$ en fonction du rayon par unité de longueur \hat{r}_0 . Les courbes bleues et rouges correspondent respectivement aux fréquences 0 et 2 qui contribuent à la détermination des bornes supérieures et inférieures de $\hat{\alpha}$. On observe que les fonctions $a(\hat{r}_0, k)$ pour les fréquences 0 et 2 changent de signe donc possèdent des points de singularité qui donnent $a(\hat{r}_0, k) = 0$, donc qui donnent une valeur infinie du rapport fa en ses points. La figure 2.3(d) est obtenue en prenant soit le maximum soit le minimum des courbes bleues et rouges données par la figure 2.3(c) en fonction du signe de $a(\hat{r}_0, k)$. On obtient donc la limite supérieure (la courbe bleue) et la limite inférieure (la courbe rouge) du paramètre $\hat{\alpha}$ pour chaque valeur de \hat{r}_0 . Le paramètre α_C , donc $\hat{\alpha}$, doit être strictement positif car sinon l'énergie $e_0(r_0)$ n'admet pas de minimum (pour plus de détails voir la section 2.2.1). La figure 2.3(d) montre que pour les valeurs de $\hat{r}_0 < 0.69$, les bornes supérieures et inférieures de $\hat{\alpha}$ sont négatives donc il n'y aura pas de cercle(s) stable(s) de rayon r_0 tel que $\hat{r}_0 = \frac{r_0}{d} < 0.69$. Pour chaque valeur du rayon par unité de longueur \hat{r}_0 compris entre 0.69 et 1.1, la limite inférieure de $\hat{\alpha}$ est donnée par la courbe rouge et la limite supérieure est infinie. Donc il existe un cercle stable de rayon $r_0 = d\hat{r}_0$ minimisant l'énergie $e_0(r_0)$ quelque soit la valeur de $0.69 < \hat{r}_0 < 1.1$. Pour $\hat{r}_0 > 1.1$, le paramètre $\hat{\alpha}$ est borné par une limite inférieure et une limite supérieure définies respectivement par la courbe rouge et la courbe bleue données par la figure 2.3(d) et donc pour les valeurs de $\hat{\alpha}$ bornées par ses limites, il existe un ou plusieurs cercle(s) stables.

L'équation 2.11 définissant une contrainte sur les paramètres du modèle des CAOS montre que pour chaque cercle stable de rayon par unité de longueur \hat{r}_0 fixé, les paramètres $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ seront liés par une équation linéaire et la représentation graphique de $\hat{\beta}$ en fonction de $\hat{\alpha}$ sera une droite de gradient $\frac{\hat{r}_0}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0)}$. L'analyse du terme de second ordre étudiée précédemment montre que seulement une partie de cette droite, qui permet d'avoir un cercle stable, définie par les limites supérieures et inférieures de $\hat{\alpha}$ données par la figure 2.3(d).

On représentera l'ensemble de ses segments de droite dans le plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ en séparant les différentes régions de \hat{r}_0 définies par les points de singularité 0,69 et 1.1. Les figures 2.4(a) et 2.4(b) montrent respectivement la région du plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ pour $0.69 < \hat{r}_0 < 1.1$ et $1.1 < \hat{r}_0 < \infty$. Réellement, ses régions sont l'ensemble des segments de droites pour différentes valeurs de \hat{r}_0 , de gradient $\frac{\hat{r}_0}{\hat{G}_{10}(\hat{r}_0)}$ qui est variable en fonction de \hat{r}_0 . La figure 2.4(c) combine les deux régions du plan pour avoir la région globale qui permet d'avoir un cercle stable. Le paramètre $\hat{\alpha}$ doit être strictement positif donc on s'intéresse seulement à la région du plan correspondante aux valeurs positives de $\hat{\alpha}$.

Dans la section 1.6, on a présenté l'importance du signe de l'énergie géométrique d'un contour qui joue un rôle très important pour la stabilité du modèle des CAOS. La figure

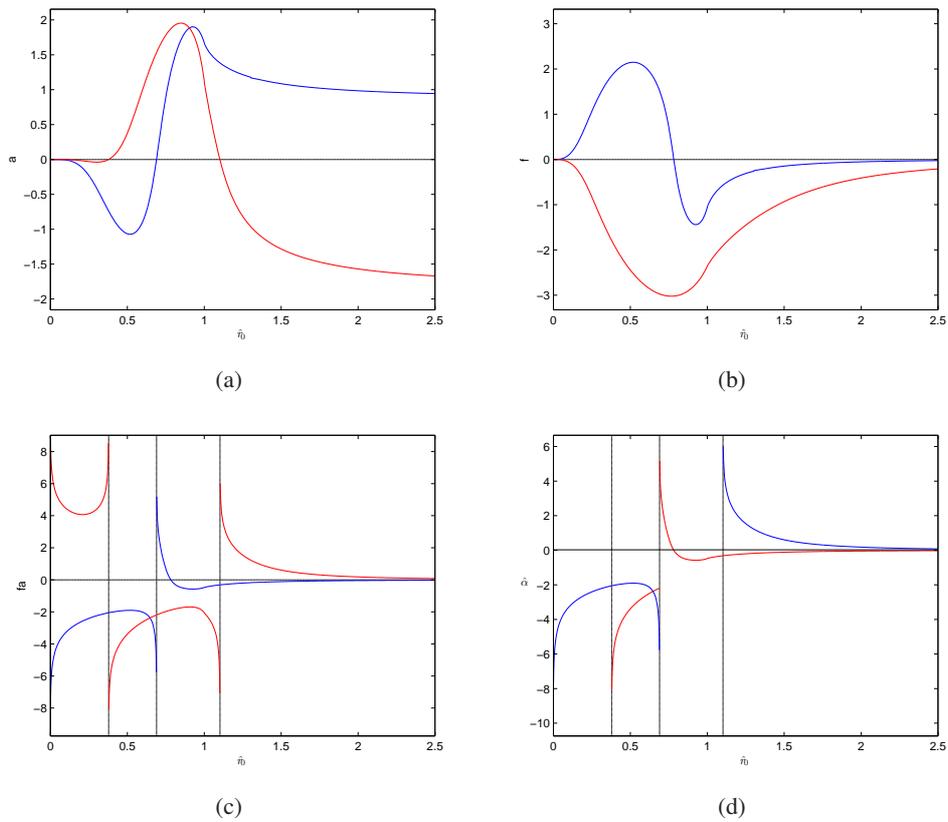


FIG. 2.3 – Détermination des limites inférieures et supérieures du paramètre $\hat{\alpha}$. Les courbes bleues et rouges relatives aux figures (a), (b) et (c) correspondent respectivement aux fréquences 0 et 2. Le courbe bleue et la courbe rouge relatives à la figure (d) correspondent respectivement à la borne supérieure et à la borne inférieure de $\hat{\alpha}$.

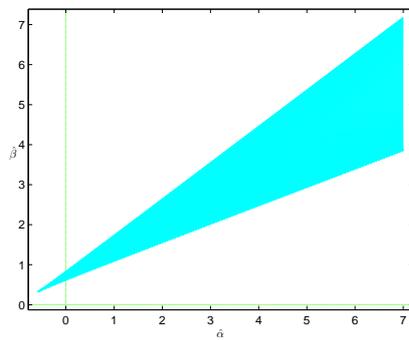
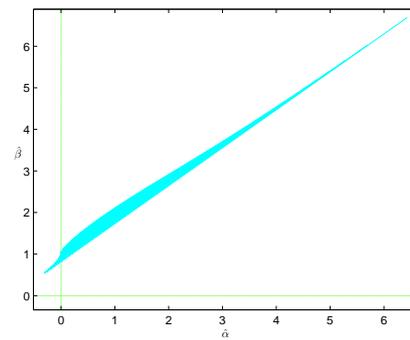
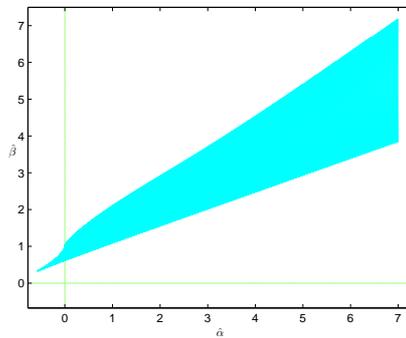
(a) $0.69 < \hat{r}_0 < 1.1$ (b) $1.1 < \hat{r}_0 < \infty$ (c) $0.69 < \hat{r}_0 < \infty$

FIG. 2.4 – Diagrammes de phase d'un cercle correspondants aux différentes régions de \hat{r}_0 . NB : réellement, les axes de ce graphe sont $asinh(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.

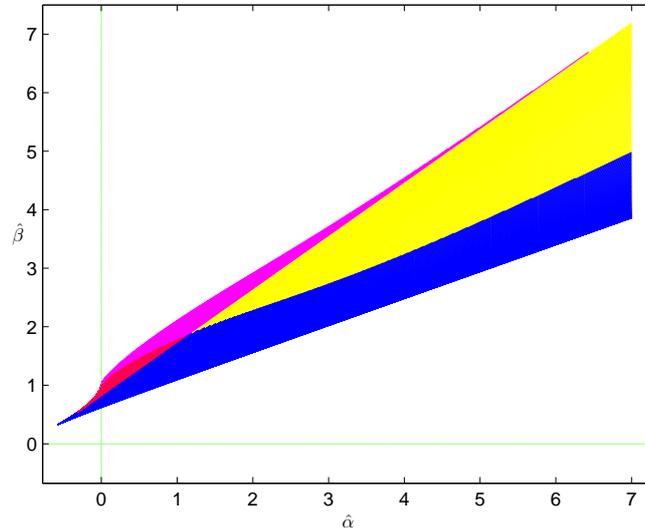


FIG. 2.5 – Diagramme de phase d'un cercle. $\hat{r}_0 \in]0.69, 1.1[\cup]1.1, \infty[$. NB : Les axes de ce graphe sont $\text{asinh}(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.

2.5 montre alors les régions du plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, déterminant le diagramme de phase d'un cercle, qui permettent d'avoir une énergie d'un cercle positive ou négative. Les paramètres $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ correspondants aux régions colorées en rouge et en bleu permettent d'avoir une énergie d'un cercle positive et celles colorées en rose et en jaune donnent une énergie d'un cercle négative. Une énergie géométrique positive d'un cercle permet à l'algorithme de minimisation de descente de gradient, l'évolution du contour initial vers un seul cercle stable. Par contre, une énergie d'un cercle stable qui est négative favorise à l'algorithme de descente de gradient la création de plusieurs cercles stables, c'est pour cette raison qu'on parle du modèle de *gaz de cercles*. Le paramètre α_C , donc $\hat{\alpha}$, doit être strictement positif ; la figure 2.6 montre alors le diagramme de phase d'un cercle pour les valeurs positives du paramètre $\hat{\alpha}$.

2.3 Résultats expérimentaux

Dans les sections précédentes de ce chapitre, nous avons étudié l'analyse de stabilité du modèle d'un cercle pour arriver à déterminer son diagramme de phase donné par la figure 2.6. Ce diagramme de phase nous permet de choisir des valeurs des paramètres d'échelle du modèle des CAOS, $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, donnant un cercle stable de rayon par unité de longueur \hat{r}_0 . Après avoir choisi les valeurs de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ et en fixant la valeur du rayon r_0 d'un cercle stable qu'on voudrait extraire, on pourra calculer la valeur de la distance d définie par $d = \frac{r_0}{\hat{r}_0}$ et les valeurs des paramètres du modèle des CAOS, α_C et β_C , qui sont exprimés en fonction des

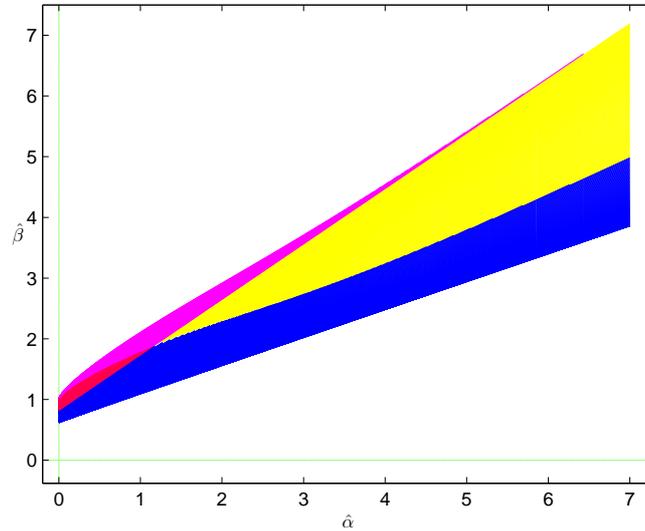


FIG. 2.6 – Diagramme de phase d'un cercle ($\hat{\alpha} > 0$). $\hat{r}_0 \in]0.69, 1.1[\cup]1.1, \infty[$. NB : réellement, les axes de ce graphe sont $asin h(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 2.11 pour la lisibilité du résultat.

paramètres d'échelle : $\alpha_C = \frac{\hat{\alpha}d}{\lambda_C}$ et $\beta_C = \frac{\hat{\beta}d}{\lambda_C}$ avec $\lambda_C > 0$. La valeur de λ_C sera fixée à 1.

La figure 2.7 montre des expériences de l'évolution d'un contour initial par la descente de gradient pour la minimisation de l'énergie géométrique donnée par l'équation 1.18. Les valeurs des paramètres relatives aux deux premières lignes de la figure 2.7 permettent à l'algorithme de descente de gradient d'évoluer le cercle initial respectivement à un cercle stable de rayon 5 et à un cercle stable de rayon 10.

La troisième et la quatrième ligne de la figure 2.7 montrent deux comportements différents d'instabilité d'un cercle. Pour ces deux expériences, les valeurs des paramètres sont choisies de la zone du plan du diagramme de phase donné par la figure 2.6 permettant d'avoir un cercle instable. L'expérience de la troisième ligne montre une disparition complète du cercle initial alors que la quatrième ligne montre un autre type d'instabilité où un cercle initial s'évolue en créant des bras liés par des jonctions à leurs extrémités.

Pour les deux dernières lignes de la figure 2.7, nous avons utilisé les mêmes valeurs des paramètres que celles des expériences de la première et la deuxième ligne, sauf que nous avons utilisé un rectangle arrondi comme contour initial au lieu d'un cercle. L'expérience de la cinquième ligne nous montre que l'algorithme de descente de gradient a fait évoluer le contour initial à un cercle stable de rayon 5. Par contre, la dernière expérience montre que la descente de gradient permet aussi de créer un ensemble de cercle (gaz de cercles) parce que l'algorithme de descente de gradient permet de chercher un minimum local donc le contour formé par l'ensemble des cercles est un minimum local de l'énergie puisque le minimum global peut être soit un seul cercle stable soit un cercle de rayon zéro.

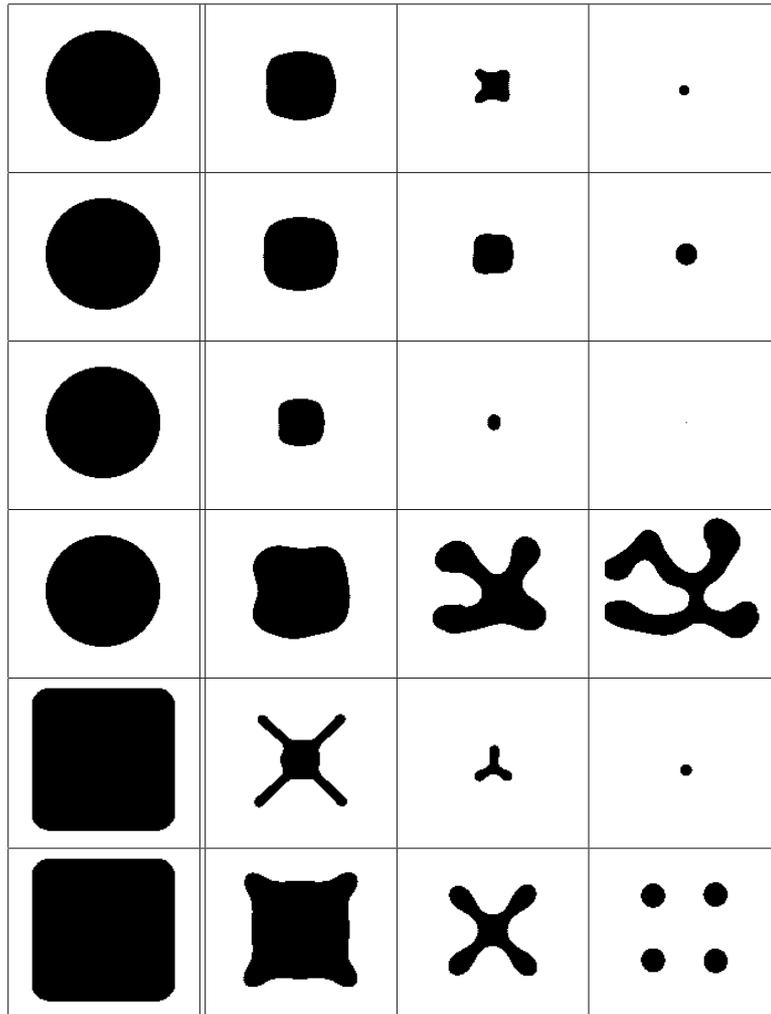


FIG. 2.7 – Résultats expérimentaux en utilisant le terme géométrique : la première colonne montre le contour initial, et les autres montrent l'évolution de ce dernier par la descente de gradient pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS.

2.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'analyse de stabilité d'un cercle fondée sur les CAOS. Le développement en série de Taylor de l'énergie géométrique du contour jusqu'au second ordre a permis la détermination des conditions de stabilité d'un cercle pour aboutir à son diagramme de phase permettant l'extraction des structures circulaires telles que les arbres présentes dans les images de télédétection.

Le même travail de stabilité sera étudié dans le chapitre suivant pour le modèle d'une barre longue en vue de l'extraction des réseaux routiers dans des images aussi bien aériennes que satellitaires.

Chapitre 3

Diagramme de phase du modèle d'une barre longue

L'objectif de ce chapitre est l'étude de la stabilité du modèle d'une barre longue fondé sur les CAOS. Nous commençons en première section de ce chapitre par développer les calculs de stabilité d'une barre de longueur infinie, en négligeant l'effet de bords pour qu'on puisse calculer l'énergie par unité de longueur qui représente l'énergie d'une portion de la barre. Une portion d'une barre longue modélise une portion d'un bras d'un réseau routier. Dans la deuxième partie, on s'intéressera à la détermination du diagramme de phase permettant d'avoir une portion stable d'une barre longue.

3.1 L'énergie géométrique d'une barre de longueur infinie

Dans cette partie du travail, le contour initial γ_0 est une barre de longueur l et de largeur w_0 . La figure 3.1 montre la forme du contour d'une barre qui sera orientée arbitrairement pour bien définir les propriétés géométriques du contour. On utilisera dans notre analyse de stabilité de la barre, la paramétrisation suivante du contour initial γ_0 :

$$\gamma_{0,\mu}(t_\mu) = \begin{cases} x_{0,\mu}(t_\mu) & = \pm_\mu l t_\mu, t_\mu \in [-0.5, 0.5] \\ y_{0,\mu}(t_\mu) & = \pm_\mu \frac{w_0}{2} \end{cases} \quad (3.1a)$$

avec

$$\pm_\mu = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu = 1 \\ -1 & \text{si } \mu = 2 \end{cases} \quad (3.1b)$$

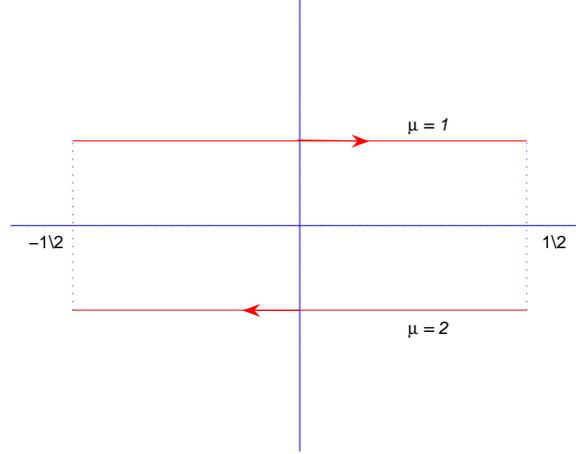


FIG. 3.1 – Paramétrisation d'une barre.

Chaque coté de la barre est paramétré séparément en définissant deux variables t_1 et t_2 relatives aux deux cotés de la barre indexés par le paramètre μ (les deux cotés correspondent respectivement à $\mu = 1$ et $\mu = 2$). Les perturbations de chaque coté de la barre sont définies comme les changements horizontaux et verticaux : $\delta\gamma_\mu(t_\mu) = (\delta x_\mu(t_\mu), \delta y_\mu(t_\mu))$ avec $(x_\mu(t_\mu), y_\mu(t_\mu))$ sont les coordonnées cartésiennes d'un point du contour de la barre. L'énergie du contour E_g est invariante par translation donc les changements tangentiels n'ont pas d'influence sur l'énergie et donc $\delta x_\mu(t_\mu) = 0$. On s'intéressera donc seulement aux changements verticaux.

Dans cette section, on calculera l'énergie géométrique d'un contour qui sera développée en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 en vue d'analyser la stabilité d'une barre longue. Le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie E_g est donné par l'équation 1.21. L'énergie du contour est invariante par translation donc l'opérateur de second ordre $\delta^2 E_g / \delta^2 \gamma$ doit être invariant par translation et donc la base de Fourier diagonalise cette matrice hessienne de dimension 2×2 . Les perturbations seront donc données en termes de coefficients de Fourier comme $\delta y_\mu(t_\mu) = \sum_{k_\mu} a_{\mu, k_\mu} e^{i k_\mu t_\mu}$ avec a_{μ, k_μ} est la composante de Fourier de fréquence k_μ relative au coté μ de la barre. On définit la longueur d'onde spatiale $\lambda_\mu = \frac{l}{m_\mu}$ avec $m_\mu \in \mathbb{Z}$. La fréquence devient donc $k_\mu = \frac{2\pi}{\lambda_\mu} = \frac{2\pi m_\mu}{l}$. Le contour γ sera défini dans le cas du modèle de la barre comme :

$$\gamma_\mu(t_\mu) = \gamma_{0, \mu}(t_\mu) + \delta\gamma_\mu(t_\mu) = \begin{cases} x_\mu(t_\mu) & = \pm_\mu l t_\mu \\ y_\mu(t_\mu) & = \pm_\mu \frac{w_0}{2} + \sum_{k_\mu} a_{\mu, k_\mu} e^{i k_\mu t_\mu} . \end{cases} \quad (3.2)$$

L'expression de l'énergie géométrique du contour γ est donnée par :

$$\begin{aligned} E_g(\gamma) &= \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} E_Q(\gamma) \\ &= \lambda_C L(\gamma) + \alpha_C A(\gamma) - \frac{\beta_C}{2} \sum_{\mu, \nu} \iint_{(\square\gamma_\mu, \square\gamma_\nu)} dt_\mu dt'_\nu G(t_\mu, t'_\nu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le terme quadratique $E_Q(\gamma)$ s'écrit comme la somme de quatre termes quadratiques. $G(t_\mu, t'_\nu)$ est l'énergie d'interaction entre deux points t_μ et t'_ν avec $\mu, \nu = 1, 2$: si $\mu = \nu$ le terme $G(t_\mu, t'_\nu)$ est l'énergie d'interaction entre deux points appartenant au même coté de la barre, sinon $G(t_\mu, t'_\nu)$ est l'énergie entre deux points appartenant chacun à un coté de la barre.

Le développement de l'énergie en série de Taylor au voisinage de γ_0 jusqu'à l'ordre 2 donnée par l'équation 1.21 est exprimé en fonction des coefficients de Fourier comme :

$$E_g(\gamma) = E_g(\gamma_0 + \delta\gamma) \approx E_g(\gamma_0) + \sum_{\mu} \sum_{k_\mu} a_{\mu, k_\mu} \frac{\delta E_g}{\delta a_{\mu, k_\mu}} + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \sum_{k_\mu, k_\nu} a_{\mu, k_\mu} a_{\nu, k_\nu} \frac{\delta^2 E_g}{\delta a_{\mu, k_\mu} \delta a_{\nu, k_\nu}}. \quad (3.4)$$

La matrice hessienne de E_g donnée en termes de coefficients de Fourier est $\delta^2 E_g / \delta a_{\mu, k_\mu} \delta a_{\nu, k_\nu}$. Comme on a mentionné précédemment, l'énergie du contour est invariante par translation donc les termes de l'équation 3.4 le sont aussi, et par suite la matrice hessienne de E_g est invariante par translation et dans ce cas la base de Fourier permet de la diagonaliser.

Dans ce qui suit, on s'intéressera au calcul de l'énergie géométrique du contour. Les détails des calculs de stabilité sont donnés dans l'annexe B.

La longueur et l'aire du contour sont donnés jusqu'à l'ordre 2 en termes de coefficients de Fourier par :

$$L(\gamma) = \sum_{\mu} \int_{\square\gamma_\mu} |\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)| dt_\mu \approx l \left\{ 2 + \frac{1}{2} \sum_k k^2 (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \right\}. \quad (3.5)$$

$$A(\gamma) = \int_{\square\gamma_1} l(y_1(t_1) - y_2(-t_1)) dt_1 = l[w_0 + (a_{1,0} - a_{2,0})]. \quad (3.6)$$

L'apparition du facteur k^2 dans l'expression de la longueur du contour L correspond à la même dépendance de la fréquence dans le cas du modèle Laplacien. Ceci montre que le terme de la longueur joue le rôle du lissage pour les perturbations du contour. Par contre les perturbations de Fourier dans le terme de l'aire du contour, A , apparaît comme un bruit blanc.

En calculant le terme quadratique $E_Q(\gamma)$, et en définissant les quantités G_{ij} (voir l'annexe B pour plus de détails), l'énergie géométrique par unité de longueur $E_g(\gamma)/l$ du contour, telle que la longueur de la barre, l , est infinie, sera :

$$\begin{aligned}
\frac{E_g(\gamma)}{l} &= 2\lambda_C + \alpha_C w_0 - \beta_C G_{00}(w_0) + [a_{1,0} - a_{2,0}] [\alpha_C - \beta_C G_{10}(w_0)] \\
&+ \sum_k [|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2] \left[\lambda_C \frac{k^2}{2} + \frac{\beta_C}{2} G_{20}(k, w_0) \right] + (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \frac{\beta_C}{2} G_{21}(k, w_0) \\
&= \underbrace{2\lambda_C + \alpha_C w_0 - \beta_C G_{00}(w_0)}_{e_0} + [a_{1,0} - a_{2,0}] \underbrace{[\alpha_C - \beta_C G_{10}(w_0)]}_{e_1} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_k [|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2] \underbrace{\left[\lambda_C k^2 + \beta_C G_{20}(w_0, k) \right]}_{e_{20}} + (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \underbrace{\beta_C G_{21}(w_0, k)}_{e_{21}} \\
&= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{2} \sum_k a_k^* e_2 a_k^t \tag{3.7}
\end{aligned}$$

avec $a_k = \begin{pmatrix} a_{1,k}^* & a_{2,k} \end{pmatrix}$; $e_0(w_0)$ est l'énergie par unité de longueur d'une barre de largeur w_0 et de longueur infinie; $e_1(w_0)$ est le terme de premier ordre du développement en série de Taylor de l'énergie par unité de longueur et e_2 est la matrice hessienne de $E_g(\gamma)$ donnée par : $\begin{pmatrix} e_{20} & e_{21} \\ e_{21} & e_{20} \end{pmatrix}$. $e_{20}(w_0, k)$ et $e_{21}(w_0, k)$ correspondent respectivement aux termes de second ordre de l'énergie par unité de longueur de chaque coté de la barre et celle entre les deux cotés. Les symboles $.^*$ et $.^t$ représentent respectivement le conjugué complexe et la transposition matricelle.

3.2 Stabilité d'une barre

L'équation 3.7 donne le développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie géométrique par unité de longueur du contour γ au voisinage d'une barre de largeur w_0 et de longueur, l , infinie. Notre objectif est de déterminer la barre infinitésimale qui minimise cette énergie, donc la portion d'une barre longue de largeur w_0 qui annule l'énergie du premier ordre, $e_1(w_0)$, et telle que la matrice hessienne, $e_2(k, w_0)$, soit définie positive $\forall k$.

3.2.1 Analyse des comportements de l'énergie par unité de longueur d'une barre longue, $e_0(w_0)$

La minimisation de l'énergie E_g revient à minimiser le terme constant de l'équation 3.7, $e_0(w_0)$. La figure 3.2 montre les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ en fonction de la largeur de la barre w_0 , pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C . Les figures 3.2(d), 3.2(e) et 3.2(f) montrent que pour les valeurs des paramètres correspondantes, l'énergie $e_0(w_0)$ n'admet pas de minimum. La courbe de $e_0(w_0)$ donnée par les figures 3.2(d) et 3.2(e) possède un point d'inflexion : pour la figure 3.2(d) le point d'inflexion admet une dérivée nulle, donc le terme du premier ordre de l'équation 3.7, $e_1(w_0)$, est nul, alors que celui de la figure 3.2(e) admet une dérivée quelconque. La figure 3.2(f) montre que pour une valeur négative du paramètre α_C , l'énergie par unité de longueur $e_0(w_0)$ n'admet pas de minimum

global puisqu'elle tend vers $-\infty$ pour les grandes valeurs de w_0 . L'expression de $e_0(w_0)$ donnée par l'équation 3.7 justifie le type de comportement de la figure 3.2(f) : la fonction $G_{00}(w_0)$ tend vers une constante pour les grandes valeurs de w_0 ($d = \epsilon = 1$) puisque la fonction d'interaction Φ apparaît dans l'expression de $G_{00}(w_0)$, donc $e_0(w_0)$ sera dominée par $\alpha_C w_0$ et ce qui nous amène à contraindre la valeur du paramètre α_C d'être **strictement positif** car sinon $e_0(w_0)$ tendra vers $-\infty$ pour les grandes valeurs de w_0 et dans ce cas l'énergie $e_0(w_0)$ n'admet pas de minimum global.

Pour les valeurs des paramètres du modèle des CAOS relatives aux figures 3.2(a), 3.2(b) et 3.2(c), l'énergie $e_0(w_0)$ admet deux extrémums : un minimum et un maximum. Le terme de second ordre de l'équation 3.7, la matrice hessienne e_2 , permet de discerner ses deux extrémums : si e_2 est définie positive, alors cet extrémum correspond à un minimum et si e_2 est définie négative, alors il s'agit d'un maximum.

Les paramètres du modèle des CAOS relatives à la figure 3.2(a) donne un minimum **positif** d'énergie géométrique par unité de longueur d'une barre longue, donc l'algorithme de descente de gradient évolue le contour initial jusqu'à avoir une portion stable d'une barre, sans formation de bras, minimisant l'énergie puisque si le nombre de bras augmente, l'énergie du contour augmente. Dans le cas de la figure 3.2(c) le minimum d'énergie d'une portion d'une barre longue est **négatif** et donc si le nombre de bras augmente alors l'énergie géométrique par unité de longueur du contour diminue. Dans ce cas l'algorithme de descente de gradient crée plusieurs bras de nombre limité à cause de l'interaction entre eux et parce que le domaine de l'image est fini.

3.2.2 Analyse de l'énergie par unité de longueur du premier ordre, $e_1(w_0)$

La première condition de stabilité d'une barre longue (le terme de premier ordre $e_1(w_0)$ est nul) permet d'avoir une contrainte sur les paramètres du modèle des CAOS, qui assure l'extrémalité de l'énergie géométrique du contour. On aura donc la contrainte suivante :

$$\beta_C(\alpha_C, w_0, d, \epsilon) = \frac{\alpha_C}{G_{10}(w_0, d, \epsilon)}. \quad (3.8)$$

En faisant un changement de variable en considérant la propriété d'invariance d'échelle de l'énergie géométrique détaillée dans la section 1.7, on aura :

$$\hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0) = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}. \quad (3.9)$$

où $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont les paramètres d'échelle du modèle des CAOS définis dans la section 1.7 et $\hat{G}_{10}(\hat{w}_0) = G_{10}(w_0, d, \epsilon)$ tels que $d = \epsilon$ et $\hat{w}_0 = \frac{w_0}{d}$. L'équation 3.9 montre que pour une barre de largeur par unité de longueur \hat{w}_0 fixée, la courbe représentative de la fonction $\hat{\beta}(\hat{\alpha})$ est une droite de pente (ou de gradient) $\frac{1}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}$.

La figure 3.3 montre les variations de w_0 , largeur d'une portion stable, en fonction du paramètre β_C en utilisant la relation donnée par 3.8. Cette courbe admet un point particulier (β_C^l, w_0^l) qui justifie les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ donnés par la figure

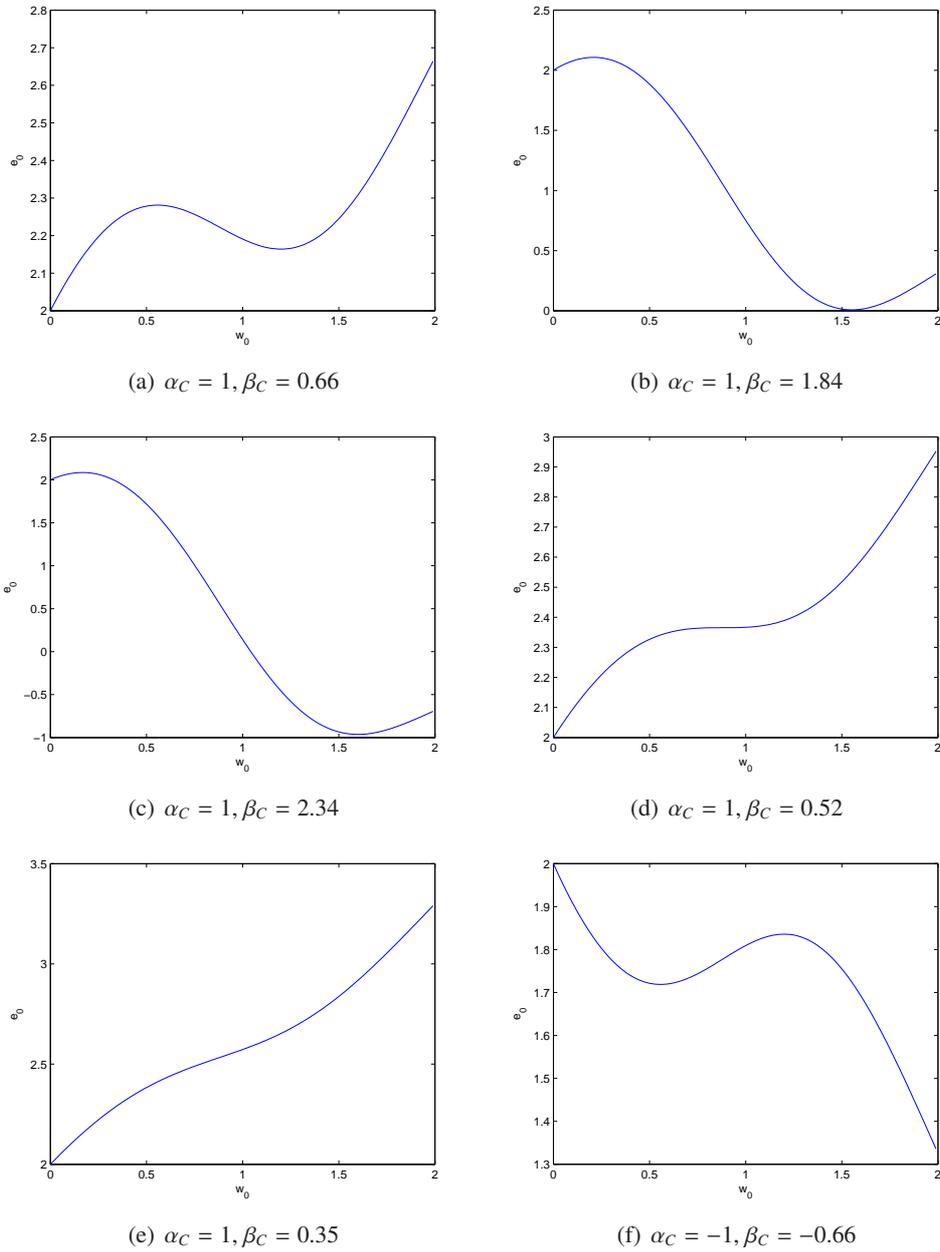


FIG. 3.2 – Les différents comportements de l'énergie $e_0(w_0)$ pour différentes valeurs des paramètres α_C et β_C . Les paramètres d , ϵ et λ_C sont fixés à 1.

3.2. Notant que pour une valeur de w_0 choisie, il existe une seule valeur du paramètre β_C satisfaisant la contrainte 3.8.

Pour $\beta_C = \beta_C^I$, les extrémums (le minimum et le maximum) seront confondus et l'énergie $e_0(w_0)$ admet un point d'inflexion au point $w_0 = w_0^I$ et donc il n'existe pas de barre stable. Pour $\beta_C < \beta_C^I$, l'énergie $e_0(w_0)$ n'admet pas d'extrémums : la courbe de l'énergie est monotone parce que l'influence du terme quadratique n'est pas assez importante par rapport à celle des termes linéaires, la longueur et l'aire du contour. Le minimum ne peut pas être situé au dessous de la valeur $w_0 = w_0^I$ puisque la courbe continue correspond au minimum alors que celle en pointillé correspond au maximum.

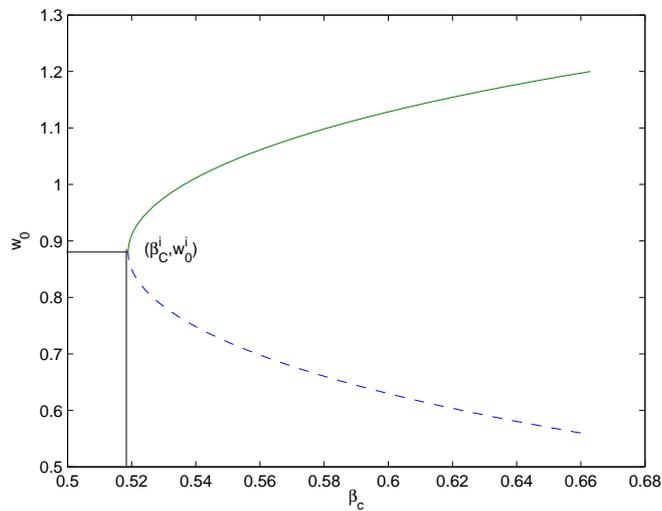


FIG. 3.3 – Représentation graphique des positions des extrémums de l'énergie $e_0(w_0)$ en fonction du paramètre β_C pour $\alpha_C = 1$. La courbe continue correspond au minimum et celle en pointillée correspond au maximum de l'énergie. Les paramètres d , ϵ et λ_C sont fixés à 1.

3.2.3 Analyse de l'énergie par unité de longueur de second ordre, $e_2(k, w_0)$

La condition de stabilité de second ordre d'une portion d'une barre longue consiste à déterminer les valeurs propres de la matrice hessienne, e_2 , et il faut qu'elles soient strictement positives pour qu'un extrémum de l'énergie, s'il existe, soit un minimum. Les valeurs propres de e_2 sont $\lambda_1 = e_{20} + e_{21}$ et $\lambda_2 = e_{20} - e_{21}$ de vecteurs propres respectifs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$. La matrice de passage P est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et la matrice hessienne e_2 sera donc

$$e_2 = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec P^{-1} est l'inverse de la matrice P donnée par :

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

L'équation 3.7 peut être donc réécrite en fonction des valeurs propres λ_1 et λ_2 comme :

$$\begin{aligned} \frac{E_g(\gamma)}{l} &= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{4} \sum_k \begin{pmatrix} a_{1,k} & a_{2,k}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k}^* \\ a_{2,k} \end{pmatrix} \\ &= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{4} \sum_k \begin{pmatrix} a_{1,k} + a_{2,k}^* & a_{1,k} - a_{2,k}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,k}^* + a_{2,k} \\ a_{1,k}^* - a_{2,k} \end{pmatrix} \\ &= e_0 + e_1 (a_{1,0} - a_{2,0}) + \frac{1}{4} \sum_k \lambda_1 |a_k^+|^2 + \lambda_2 |a_k^-|^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

avec $a_k^+ = a_{1,k} + a_{2,k}^*$ et $a_k^- = a_{1,k} - a_{2,k}^*$.

Pour simplifier, notons $\lambda_{\pm} = e_{20} \pm e_{21}$ qui correspond aux valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_+ = e_{20} + e_{21}$ et $\lambda_2 = \lambda_- = e_{20} - e_{21}$. L'expression de λ_{\pm} devient donc en remplaçant e_{20} et e_{21} par leurs expressions données par l'équation 3.7 :

$$\lambda_{\pm}(\lambda_C, \alpha_C, \beta_C, d, \epsilon, w_0, k) = \lambda_C k^2 + \beta_C(\alpha_C, w_0) G_{\pm}(d, \epsilon, w_0, k),$$

avec $G_{\pm}(d, \epsilon, w_0, k) = G_{20}(d, \epsilon, w_0, k) \pm G_{21}(d, \epsilon, w_0, k)$. La propriété de l'invariance d'échelle de l'énergie détaillée dans la section 1.7 permet de réécrire cette expression en fonction de la largeur par unité de longueur d'une barre, $\hat{w}_0 = \frac{w_0}{d}$, et des deux paramètres d'échelle $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$:

$$\hat{\lambda}_{\pm}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{w}_0, k) = k^2 + \hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0) \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k),$$

qui sera, en remplaçant $\hat{\beta}$ par son expression donnée par la première contrainte de stabilité 3.9 :

$$\hat{\lambda}_{\pm}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0, k) = k^2 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)} \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k),$$

La condition de stabilité de second ordre d'une portion d'une barre de longueur infinie est :

$$\hat{\lambda}_{\pm}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0, k) > 0, \forall k \Leftrightarrow k^2 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)} \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k) > 0, \forall k,$$

ce qui est équivalent à :

$$\hat{\alpha} \hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k) > -k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0), \forall k.$$

puisque $\hat{G}_{10}(\hat{w}_0) > 0, \forall \hat{w}_0 \in]0, 2[$. Quatre cas se présentent selon le signe de G_+ et de G_- :

$$\text{- si } \hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0 \text{ et } \hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0 \text{ alors } \hat{\alpha} > \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k)}, \forall k \text{ donc } \hat{\alpha} > \hat{\alpha}_{min},$$

$$\text{- si } \hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0 \text{ et } \hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0 \text{ alors } \hat{\alpha} < \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\hat{G}_-(\hat{w}_0, k)}, \forall k$$

$$\text{donc } \hat{\alpha}_{min} < \hat{\alpha} < \hat{\alpha}_{max} = \min_k \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\hat{G}_-(\hat{w}_0, k)},$$

$$\text{- si } \hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0 \text{ et } \hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0 \text{ alors } \hat{\alpha} < \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\hat{G}_+(\hat{w}_0, k)}, \forall k$$

$$\text{donc } \hat{\alpha}_{min} < \hat{\alpha} < \hat{\alpha}_{max} = \min_k \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\hat{G}_+(\hat{w}_0, k)},$$

$$\text{- si } \hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0 \text{ et } \hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0 \text{ alors } \hat{\alpha} < \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\max(\hat{G}_+(\hat{w}_0, k), \hat{G}_-(\hat{w}_0, k))}, \forall k$$

$$\text{donc } \hat{\alpha}_{min} < \hat{\alpha} < \hat{\alpha}_{max} = \min_k \frac{-k^2 \hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}{\max(\hat{G}_+(\hat{w}_0, k), \hat{G}_-(\hat{w}_0, k))}.$$

La borne inférieure $\hat{\alpha}_{min}$ existe dans le cas où $\hat{G}_{\pm}(\hat{w}_0, k) > 0$ donc la borne inférieure sera toujours négative. Or α_C est strictement positif (voir la section 3.2.1 pour plus de détails), et donc $\hat{\alpha}$ doit être strictement positif, d'où $\hat{\alpha}_{min} = 0, \forall \hat{w}_0 \in]0, 2[$.

La figure 3.4 montre les différentes régions du plan (\hat{w}_0, k) correspondantes aux quatre cas présentés au dessus. Les régions colorées en blanc, rouge, bleu et noir correspondent respectivement à $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0$ et $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0$, $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) > 0$ et $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0$, $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0$ et $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) > 0$, et $\hat{G}_+(\hat{w}_0, k) < 0$ et $\hat{G}_-(\hat{w}_0, k) < 0$.

Les limites du paramètre $\hat{\alpha}$ sont données par la figure 3.5. Pour qu'une portion d'une barre longue de largeur par unité de longueur $\hat{w}_0 = \frac{w_0}{d}$ comprise entre 0 et 2 soit stable, le paramètre d'échelle $\hat{\alpha}$ doit être borné par une limite inférieure (la courbe rouge) qui est nulle et par une limite supérieure (la courbe bleue). Les trois droites verticales représentent

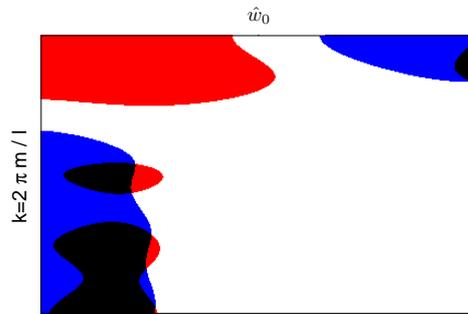


FIG. 3.4 – Représentation des quatre régions possibles relatives au changement de signe des fonctions \hat{G}_+ et \hat{G}_- . L'origine est situé en haut et à gauche. La valeur de \hat{w}_0 est comprise entre 0 et 2.

les points de singularité (les zéros) des fonctions $\hat{G}_\pm(\hat{w}_0, k)$ avec $k \in K$, K est l'ensemble des fréquences qui contribuent à la détermination des limites du paramètre $\hat{\alpha}$. Expérimentalement, seulement les fréquences 0 et 1 qui permettent de déterminer les bornes supérieures et inférieures de $\hat{\alpha}$. Pour les valeurs de $\hat{w}_0 \in [0, 0.8802] \cup [1.3004, 2]$ (où $\alpha_{min} = \alpha_{max} = 0$), il n'existe pas de barre stable de largeur $w_0 = d\hat{w}_0$. Si \hat{w}_0 est compris entre 0.8802 et 0.928 alors une portion d'une barre longue de largeur par unité de longueur \hat{w}_0 est stable si la valeur de $\hat{\alpha}$ est située au dessous de la courbe verte. Pour la gamme des valeurs de $\hat{w}_0 \in]0.928, 1.3004[$, une portion d'une barre de largeur par unité de longueur \hat{w}_0 est stable quelque soit la valeur du paramètre $\hat{\alpha}$ strictement positif (la borne supérieure de $\hat{\alpha}$ est infinie).

L'objectif de cette analyse de stabilité est de déterminer la région du plan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$, qui sera nommée **diagramme de phase**, permettant d'avoir une portion stable d'une barre de largeur w_0 . Les conditions de stabilité de premier et second ordre d'une portion d'une barre longue étudiées précédemment permettent de déterminer le diagramme de phase du modèle de la barre. L'équation 3.9 montre que pour chaque valeur de la largeur par unité de longueur \hat{w}_0 d'une portion de la barre, la courbe représentative de la fonction $\hat{\beta}(\hat{\alpha}, \hat{w}_0)$ est une droite de pente $\frac{1}{\hat{G}_{10}(\hat{w}_0)}$ et puisque $\hat{\alpha}$ est borné alors l'ensemble des points $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ donnant une portion stable de largeur \hat{w}_0 est un segment de droite. En représentant l'ensemble de toutes ses droites de gradient variable en fonction des valeurs de \hat{w}_0 donnant une portion d'une barre stable, c'est à dire $\hat{w}_0 \in]0.8802, 0.928[\cup]0.928, 1.3004[$, on obtient le graphe donné par la figure 3.6. Les régions colorées de la figure 3.6 correspondent à l'ensemble des points $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ qui donnent une portion stable d'une barre longue. On a mentionné dans la section 1.6 l'im-

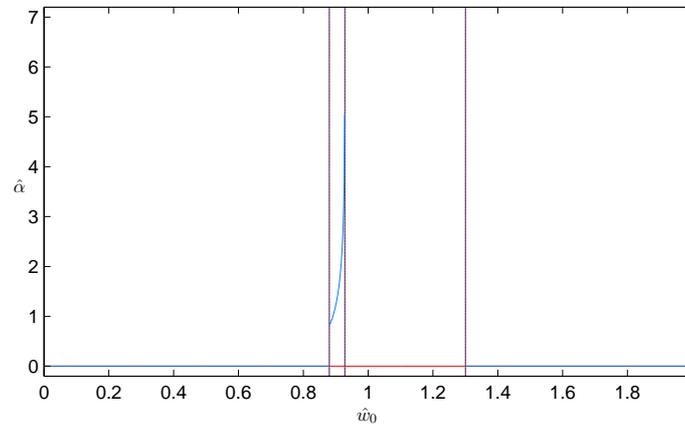


FIG. 3.5 – Les bornes inférieures et supérieures du paramètre $\hat{\alpha}$ colorées respectivement en bleue et en rouge.

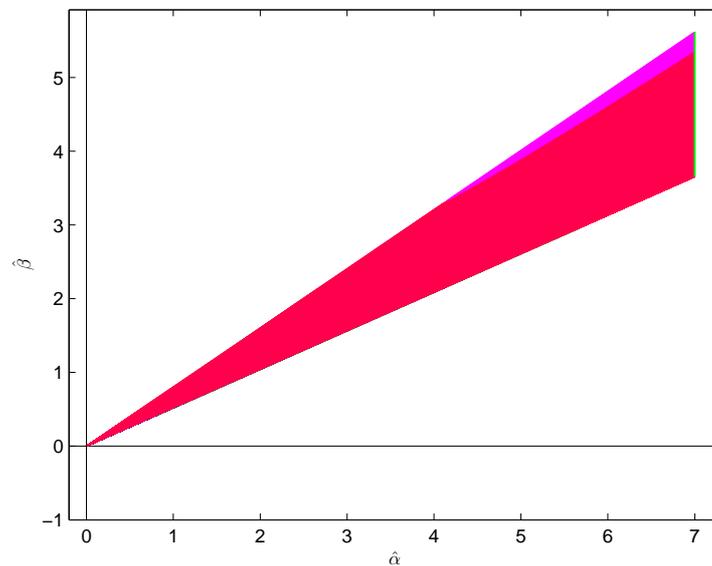


FIG. 3.6 – Diagramme de phase d'une portion d'une barre longue. $\hat{w}_0 \in]0.8802, 0.928[\cup]0.928, 1.3004[$. Les axes de ce graphe sont $\text{asinh}(\hat{\alpha})$ et son image par la fonction donnée par l'équation 3.9 pour la lisibilité du résultat.

portance du signe de l'énergie géométrique du contour. Les régions colorées en rouge et en rose données par la figure 3.6 donnent respectivement une énergie géométrique positive et une énergie géométrique négative d'une portion stable d'une barre longue. Les valeurs des paramètres d'échelle de la région colorée en rose permettent donc à l'algorithme de minimisation de descente de gradient de créer, à partir d'un contour initial, un réseau de bras obtenu par concaténation de plusieurs portions stables puisque l'énergie de ses derniers est négative. Par contre, la région du diagramme de phase colorée en rouge correspond à l'ensemble des valeurs des paramètres du modèle des CAOS qui permettent d'avoir une portion stable d'une barre longue d'énergie positive donc l'algorithme de descente de gradient évolue le contour initial vers une seule portion stable.

3.3 Résultats expérimentaux

Dans ce paragraphe, on montre des résultats expérimentaux de l'évolution d'un contour par la descente de gradient en utilisant le terme de l'énergie géométrique. La figure 3.7 montre l'évolution d'un contour initial donné par la première colonne pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS donné par l'équation 1.18. En choisissant donc des valeurs des paramètres d'échelle $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ à partir du diagramme de phase d'une portion d'une barre longue donné par la figure 3.6, on aura la valeur de la largeur par unité de longueur \hat{w}_0 et par la suite on pourra calculer la valeur de la distance $d = \frac{w_0}{\hat{w}_0}$ en fixant la valeur de la largeur w_0 des bras du réseau qu'on voudrait extraire.

Les deux premières lignes de la figure 3.7 montrent l'évolution d'une barre initiale, de largeur 35 pixels, à une barre de largeur respectives 5 et 10. Donc pour ses deux premières expériences, les valeurs choisies des paramètres du modèle des CAOS à partir du diagramme de phase du modèle de la barre ont permis d'avoir une barre stable à partir de la barre initiale qui a subi seulement un changement de largeur.

Pour les expériences correspondantes à la troisième et quatrième ligne, on a choisi des valeurs des paramètres à partir d'une région du diagramme de phase donné par la figure 3.6 donnant une barre instable (les régions du plan non colorées). Deux comportements d'instabilité peuvent être présentés : le premier correspond à la disparition complète de la barre ce qui prouve que le minimum de l'énergie géométrique du contour correspond à une barre de largeur zéro ; le deuxième type d'instabilité montre que la barre est instable dans le sens où les perturbations induites par l'algorithme de descente de gradient ont évolué la barre initiale vers un contour de forme géométrique quelconque.

Pour la cinquième ligne, nous avons utilisé les mêmes valeurs des paramètres que celles utilisées en quatrième ligne mais pour cette expérience le contour initial est un rectangle arrondi. Le résultat final est donc la disparition complète du contour initial ; ce qui montre que pour ses valeurs des paramètres, l'énergie géométrique du contour n'admet pas de minimum à part le contour vide.

L'expérience correspondante à la sixième ligne de la montre l'évolution du contour initial à un contour formé par plusieurs bras de largeur fixe, en choisissant des valeurs des paramètres à partir de la région du plan du diagramme de phase donné par la figure 3.6 permettant d'avoir une portion stable d'une barre.

Les diagrammes de phase d'un cercle et d'une portion d'une barre longue donnés respectivement par les figures 2.5 et 3.6 montrent que en superposant les deux diagrammes, on peut distinguer trois régions de stabilité du modèle des CAOS : une région permettant d'avoir un cercle stable, une deuxième région donnant une portion stable d'une barre et une troisième région critique qui correspond à l'intersection des deux diagrammes de phase et qui permet de donner aussi bien un cercle stable de rayon r_0 qu'une portion stable de largeur w_0 pour les mêmes valeurs des paramètres. La dernière expérience de la figure 3.7 montre ce genre de comportement : on a choisi des valeurs des paramètres de la région critique et l'algorithme de descente de gradient à évoluer le contour initial vers un contour formé par un ensemble ou gaz de cercles et puisque la descente de gradient est un algorithme d'optimisation permettant d'avoir un optimum local, alors on ne peut pas décider si cette représentation du contour final est optimale ou non.

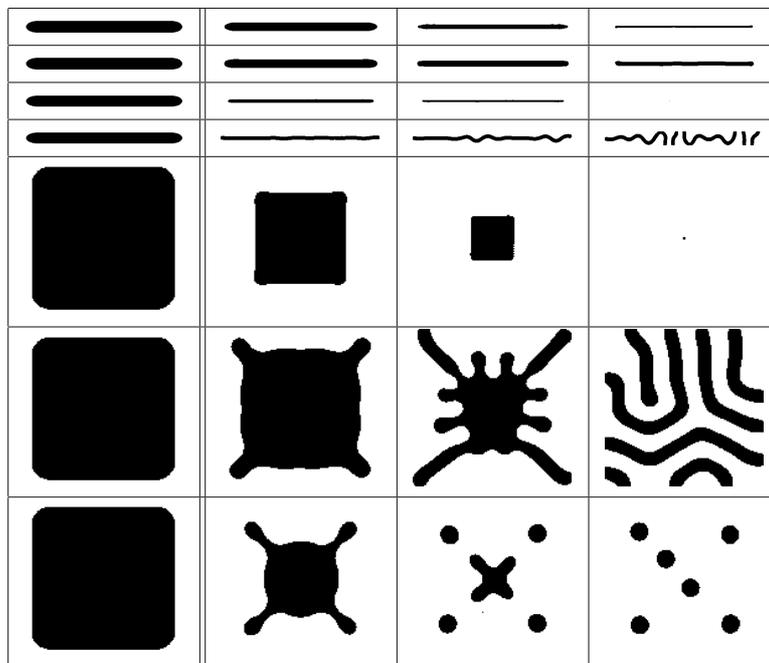


FIG. 3.7 – Résultats expérimentaux en utilisant le terme géométrique : la première colonne montre le contour initial, et les autres montrent l'évolution de ce dernier par la descente de gradient pour différentes valeurs des paramètres du modèle des CAOS.

3.4 Conclusion

L'étude de l'analyse de stabilité d'une barre de longueur infinie détaillée dans ce chapitre nous a permis de déterminer le diagramme de phase du modèle des CAOS permettant l'extraction des réseaux routiers présents dans les images de télédétection. Notre étude de stabilité était basée sur le développement de Taylor jusqu'à l'ordre 2 de l'énergie géomé-

trique d'une portion d'une barre longue perturbée par des petites variations exprimées en termes de coefficients de Fourier.

Conclusion et Perspectives

Dans cette conclusion, nous présentons les principales contributions de ce travail, ainsi que ses directions futures.

Synthèse des travaux effectués

Nous avons axé ce travail sur l'analyse de stabilité du modèle de gaz de cercles pour l'extraction des arbres et du modèle d'une barre longue en vue de l'extraction des réseaux routiers. Dans le chapitre 1, on a présenté les principaux travaux antérieurs sur les contours actifs classiques et ceux de second ordre pour des applications fondées sur la modélisation de la forme pour la reconnaissance d'objet.

Diagramme de phase d'un cercle

Dans le chapitre 2, nous avons arrivé à déterminer des contraintes de stabilité de premier ordre et de second ordre en termes de développement en série de Taylor de l'énergie du contour jusqu'à l'ordre 2. Ses contraintes ont permis de déterminer le diagramme de phase d'un cercle servant à discerner les différents comportements possibles de l'énergie d'un cercle.

Diagramme de phase d'une barre longue

Les réseaux routiers présents dans des images de télédétection ont été modélisés dans ce travail par des portions d'une barre longue et de largeur constante. Le chapitre 3 est l'objet de l'analyse de stabilité d'une barre de longueur infinie pour négliger l'effet des bords. Nous avons déterminé des contraintes de stabilité de l'énergie par unité de longueur d'une barre longue permettant la détermination de son diagramme de phase pour l'extraction des réseaux routiers.

Perspectives

Analyse de la zone critique du diagramme de phase

Les diagrammes de phase d'un cercle et d'une portion d'une barre longue sont donnés respectivement par les figures 2.5 et 3.6. Si on superpose les deux diagrammes sur la même figure, on aura le diagramme de phase complet du modèle des CAOS. On peut distinguer trois régions : une région qui correspond à un cercle stable, une région qui correspond à une portion stable d'une barre longue et une troisième région qui est l'intersection des deux diagrammes de phase. Cette dernière région est une zone critique du diagramme de phase où un cercle et une portion d'une barre sont stables. On peut donc étudier dans des futurs travaux de recherche cette zone critique en considérant l'énergie géométrique totale qui est égale au produit de la longueur de la barre et de son énergie géométrique par unité de longueur donnée par l'équation 3.7.

Effet de bords du modèle de la barre

L'analyse de stabilité et le diagramme de phase étudiés dans le chapitre 3 correspondent au modèle d'une barre longue pour négliger l'effet de bords de la barre. Le problème de l'effet de bords apparaît lorsque l'énergie d'une portion de la barre est positive et par la suite l'algorithme de descente de gradient évolue la barre initiale jusqu'à la disparition complète puisque l'interaction de ses extrémités n'étaient pas intégrée dans le modèle des CAOS. On peut donc ajouter les termes d'interaction entre les extrémités de la barre et ses deux côtés au modèle des CAOS défini dans le chapitre 3.

Annexe A

Details des calculs de stabilité du modèle de gaz de cercles

Dans cet annexe, on détaillera les calculs des différents termes permettant le calcul de l'énergie géométrique totale d'un cercle donnée par l'équation (2.5) développée en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 au voisinage d'un cercle.

La représentation paramétrique d'un cercle et l'expression de la perturbation radiale en termes de coefficients de Fourier sont données par :

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) + \delta\gamma(t) = (r(t), \theta(t)) = (r_0(t) + \delta r(t), \theta_0(t)) \quad (\text{A.1a})$$

où

$$\gamma_0(t) = (r_0(t), \theta_0(t)) = (r_0, t) \quad (\text{A.1b})$$

et

$$\delta r(t) = \sum_k a_k e^{ir_0 k t}, \quad (\text{A.1c})$$

avec $k \in \{m/r_0 : m \in \mathbb{Z}\}$.

La dérivée du contour γ est donnée par :

$$\dot{\theta}(t) = 1 \quad (\text{A.2a})$$

$$\dot{r}(t) = \dot{\delta r}(t) = \sum_k a_k i r_0 k e^{ir_0 k t}. \quad (\text{A.2b})$$

Le champ de vecteurs tangents est donné par :

$$\tau(t) = \dot{r}(t)\partial_r + \dot{\theta}(t)\partial_\theta. \quad (\text{A.3})$$

Dans ce qui suit, on a besoin de l'amplitude de ce vecteur développée jusqu'à l'ordre 2. Dans le système de coordonnées polaires, la métrique est donnée par $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. On

aura donc $|\tau(t)|^2 = \dot{r}(t)^2 + r(t)^2$. En substituant les expressions données par les équations (A.1) et (A.2b), on aura :

$$|\tau(t)|^2 = r_0^2 + 2r_0 \sum_k a_k e^{ir_0 k t} + \sum_{k,k'} a_k a_{k'} e^{ir_0(k+k')t} (1 - r_0^2 k k'). \quad (\text{A.4})$$

En utilisant le fait que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, l'expression de l'amplitude du vecteur tangent développée jusqu'à l'ordre 2 en termes des coefficients de Fourier a_k devient donc :

$$|\tau(t)| = r_0 \left\{ 1 + \sum_k \frac{a_k}{r_0} e^{ir_0 k t} - \frac{1}{2} \sum_{k,k'} a_k a_{k'} k k' e^{ir_0(k+k')t} \right\}. \quad (\text{A.5})$$

A.1 La longueur du contour : $L(\gamma)$

En utilisant l'équation (A.5), le terme de longueur est alors donnée jusqu'à l'ordre 2 par :

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} dt |\tau(t)| = 2\pi r_0 \left\{ 1 + \frac{a_0}{r_0} + \frac{1}{2} \sum_k k^2 |a_k|^2 \right\},$$

où

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{ir_0 k t} = 2\pi \delta(k), \quad (\text{A.6})$$

et que $a_{-k} = a_k^*$, avec $*$ est le conjugué complexe, puisque δr est réel.

A.2 L'aire du contour : $A(\gamma)$

L'aire du contour est donnée par :

$$A(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} dr' r' = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{2} r^2(\theta).$$

En utilisant les équations (A.1) et (A.6), l'expression de l'aire devient donc :

$$A(\gamma) = \pi r_0^2 + 2\pi r_0 a_0 + \pi \sum_k |a_k|^2. \quad (\text{A.7})$$

A.3 L'énergie quadratique

Pour le calcul du développement en série de Taylor du terme quadratique de l'équation 1.18, on a besoin du développement de $\tau(t) \cdot \tau(t')$ et de $\Phi(R(t, t'))$.

A.3.1 Produit interne des vecteurs tangents

Les vecteurs tangents $\tau(t)$ et $\tau(t')$ sont exprimés en coordonnées polaires où la base de système de coordonnées est relative à chaque point $\gamma(t)$ du contour. Pour remédier à ce problème, on représentera ses vecteurs tangents dans le système des coordonnées cartésiennes, on aura donc :

$$\begin{aligned}\partial_r &= \cos(\theta)\partial_x + \sin(\theta)\partial_y \\ \partial_\theta &= -r \sin(\theta)\partial_x + r \cos(\theta)\partial_y ,\end{aligned}$$

Le produit interne $\tau \cdot \tau'$ est donné donc par :

$$\begin{aligned}\tau \cdot \tau' &= \cos(\theta' - \theta)[r_0^2 + r_0\delta r + r_0\delta r' + \delta r\delta r' + \dot{\delta r}\dot{\delta r}'] \\ &\quad + \sin(\theta' - \theta)[r_0\dot{\delta r}' - r_0\dot{\delta r} + \delta r\dot{\delta r}' - \dot{\delta r}\delta r'] .\end{aligned}$$

A.3.2 Distance entre deux points du contour

La distance au carrée entre les deux points $\gamma(t')$ et $\gamma(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}|\gamma(t') - \gamma(t)|^2 &= (x(t') - x(t))^2 + (y(t') - y(t))^2 \\ &= [(r_0 + \delta r') \cos(\theta') - (r_0 + \delta r) \cos(\theta)]^2 + [(r_0 + \delta r') \sin(\theta') - (r_0 + \delta r) \sin(\theta)]^2 ,\end{aligned}$$

qui devient après développement

$$|\gamma(t') - \gamma(t)|^2 = 2r_0^2(1 - \cos(\Delta\theta)) \left\{ 1 + \frac{1}{r_0}(\delta r + \delta r') + \frac{\delta r^2 + \delta r'^2 - 2 \cos(\Delta\theta)\delta r\delta r'}{2r_0^2(1 - \cos(\Delta\theta))} \right\} ,$$

où $\Delta\theta = \theta' - \theta = t' - t$. En utilisant le fait que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, la distance entre deux point $\gamma(t')$ et $\gamma(t)$, $R(t, t')$, est donnée jusqu'à l'ordre 2 par

$$R(t, t') = |\gamma(t') - \gamma(t)| = 2r_0|\sin(\Delta\theta/2)| + |\sin(\Delta\theta/2)|(\delta r + \delta r') + \frac{A(\Delta\theta)}{4r_0}(\delta r - \delta r')^2 , \quad (\text{A.9})$$

où $A(z) = \left(\frac{\cos^2(\frac{z}{2})}{|\sin \frac{z}{2}|} \right)$.

A.3.3 Fonction d'interaction

En développant la fonction d'interaction $\Phi(z)$ jusqu'à l'ordre 2 et en substituant z par l'expression de $R(t, t')$ approximée jusqu'à l'ordre 2 par l'équation (A.9), on aura

$$\begin{aligned}\Phi(R(t, t')) &= \Phi(X_0) + \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \Phi'(X_0)(\delta r + \delta r') \\ &\quad + \frac{1}{4r_0}A(\Delta\theta)\Phi'(X_0)(\delta r - \delta r')^2 + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\Phi''(X_0)(\delta r + \delta r')^2 , \quad (\text{A.10})\end{aligned}$$

où $X_0 = 2r_0|\sin(\Delta\theta/2)|$.

A.3.4 Calcul de l'énergie quadratique

La quantité à intégrer pour le calcul de l'énergie quadratique est telle que $G(t, t') = \tau(t) \cdot \tau(t') \Phi(R(t, t'))$. En substituant ses termes par leurs expressions calculées précédemment, on aura :

$$\begin{aligned}
G(t, t') = & \underbrace{r_0^2 \cos(\Delta\theta) \Phi(X_0)}_{F_{00}, \text{paire}} \\
& + \underbrace{(\delta r + \delta r') r_0 \cos(\Delta\theta) \left\{ \Phi(X_0) + r_0 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \Phi'(X_0) \right\}}_{F_{10}, \text{paire}} \\
& + \underbrace{(\delta r' - \delta r) r_0 \sin(\Delta\theta) \Phi(X_0)}_{F_{11}, \text{impaire}} \\
& + \underbrace{(\delta r^2 + \delta r'^2) r_0 \cos(\Delta\theta) \left\{ \frac{1}{4} A(\Delta\theta) \Phi'(X_0) + \frac{1}{2} r_0 \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \Phi''(X_0) + \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \Phi'(X_0) \right\}}_{F_{20}, \text{paire}} \\
& + \underbrace{(\delta r \delta r') \cos(\Delta\theta) \left\{ \Phi(X_0) + 2r_0 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \Phi'(X_0) - \frac{1}{2} r_0 A(\Delta\theta) \Phi'(X_0) + r_0^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \Phi''(X_0) \right\}}_{F_{21}, \text{paire}} \\
& + \underbrace{(\delta r' \delta r' - \delta r \delta r) r_0 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \sin(\Delta\theta) \Phi'(X_0)}_{F_{22}, \text{impaire}} \\
& + \underbrace{(\delta r \delta r' - \delta r' \delta r) \sin(\Delta\theta) \left\{ \Phi(X_0) + r_0 \left| \sin \frac{\Delta\theta}{2} \right| \Phi'(X_0) \right\}}_{F_{23}, \text{impaire}} \\
& + \underbrace{(\delta r \delta r') \cos(\Delta\theta) \Phi(X_0)}_{F_{24}, \text{paire}} .
\end{aligned}$$

où on a introduit les notations $F_{00} \dots F_{24}$ pour les fonctions qui apparaissent dans le terme de G , *paire* et *impaire* permettent de définir la parité des fonctions F en échangeant t et t' . Les fonctions F sont en fonction de $t - t'$ seulement, et chaque ligne de G est symétrique en t et t' .

Le terme de l'énergie quadratique est donné par $\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' G(t, t')$. On substitue δr et $\delta r'$ par leurs expressions en termes des coefficients de Fourier, $\delta r(t) = \sum_k a_k e^{ir_0 kt}$ et $\delta r'(t) = \sum_k a_k i r_0 k e^{ir_0 kt}$. Les fonctions F dépendent de $t - t'$, on peut donc calculer ses intégrales en faisant un changement de variables $p = t' - t$. En notant la symmétrie et l'antisymmétrie de chaque ligne de $G(t, t')$ en termes de δr et $\delta r'$, les intégrales seront nulles ou multipliées par un facteur 2. Par exemple :

$$\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' (\delta r \delta r' - \delta r' \delta r) F_{23}(t' - t) = 2 \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r \delta r' F_{23}(t' - t) .$$

Dans la suite, on détaillera les calculs des différentes intégrales des fonctions F en tenant compte de leurs propriétés de symmétries et d'antisymétrie :

$$\begin{aligned} \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' F_{00}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' F_{00}(p) \\ &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{00}(p) , \end{aligned}$$

parce que F_{00} est symétrique ;

$$\begin{aligned} \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r(t) F_{10}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k a_k e^{ir_0 kt} F_{10}(t' - t) \\ &= \sum_k a_k \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0 k(-p+t')} F_{10}(p) \\ &= \sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0 kt'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 kp} F_{10}(p) \\ &= \sum_k a_k 2\pi \delta(k) \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 kp} F_{10}(p) \\ &= 2\pi a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{10}(p) , \end{aligned}$$

parce que F_{10} est symétrique ;

$$\begin{aligned} \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta \dot{r}(t) F_{11}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k a_k i r_0 k e^{ir_0 kt} F_{11}(t' - t) \\ &= \sum_k a_k i r_0 k \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0 k(-p+t')} F_{11}(p) \\ &= \sum_k a_k i r_0 k \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0 kt'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 kp} F_{11}(p) \\ &= \sum_k a_k i r_0 k 2\pi \delta(k) \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0 kp} F_{11}(p) \\ &= 0 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r^2(t) F_{20}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} e^{ir_0(k+k')t} F_{20}(t' - t) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0(k+k')(-p+t')} F_{20}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0(k+k')t'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0(k+k')p} F_{20}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} 2\pi \delta(k+k') \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0(k+k')p} F_{20}(p) \\
&= \sum_k a_k a_{-k} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{20}(p) \\
&= 2\pi \sum_k |a_k|^2 \int_{-\pi}^{\pi} dp F_{20}(p),
\end{aligned}$$

parce que F_{20} est symétrique ;

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r(t) \delta r(t') F_{21}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} e^{ir_0(kt+k't')} F_{21}(t' - t) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0k(-p+t')} e^{ir_0k't'} F_{21}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0(k+k')t'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{21}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} 2\pi \delta(k+k') \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{21}(p) \\
&= \sum_k a_k a_{-k} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{21}(p) \\
&= 2\pi \sum_k |a_k|^2 \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{21}(p);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r(t) \dot{\delta r}(t) F_{22}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} ir_0 k e^{ir_0(k+k')t} F_{22}(t' - t) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} ir_0 k \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0(k+k')(-p+t')} F_{22}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} ir_0 k \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0(k+k')t'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0(k+k')p} F_{22}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} ir_0 k 2\pi \delta(k+k') \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0(k+k')p} F_{22}(p) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

parce que la fonction delta est nulle sauf pour $k + k' = 0$, donc le terme $e^{-ir_0(k+k')p}$ disparaît et puisque la fonction F_{22} est antisymétrique, l'intégrale sera nulle.

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r(t) \delta r(t') F_{23}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} i r_0 k' e^{ir_0(kt+k't')} F_{23}(t' - t) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} i r_0 k' \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0(k(-p+t')+k't')} F_{23}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} i r_0 k' \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0(k+k')t'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{23}(p) \\
&= \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} i r_0 k' 2\pi \delta(k + k') \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{23}(p) \\
&= -2\pi \sum_k |a_k|^2 i r_0 k \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{23}(p) ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \delta r(t) \delta r(t') F_{24}(t' - t) &= \iint_{-\pi}^{\pi} dt dt' \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} i^2 r_0^2 k k' e^{ir_0(kt+k't')} F_{24}(t' - t) \\
&= - \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} r_0^2 k k' \iint_{-\pi}^{\pi} dp dt' e^{ir_0(k(-p+t')+k't')} F_{24}(p) \\
&= - \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} r_0^2 k k' \int_{-\pi}^{\pi} dt' e^{ir_0(k+k')t'} \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{24}(p) \\
&= - \sum_k \sum_{k'} a_k a_{k'} r_0^2 k k' 2\pi \delta(k + k') \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{24}(p) \\
&= 2\pi \sum_k |a_k|^2 r_0^2 k^2 \int_{-\pi}^{\pi} dp e^{-ir_0kp} F_{24}(p) .
\end{aligned}$$

Annexe B

Details des calculs de stabilité du modèle de la barre

Dans cet annexe, on détaillera les calculs des différents termes permettant le calcul de l'énergie géométrique totale d'une barre donnée par l'équation (3.4) développée en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 au voisinage d'une barre initiale de largeur w_0 .

B.1 Calcul de la longueur $L(\gamma)$

La dérivée du contour γ est donnée par :

$$\dot{\gamma}_\mu(t_\mu) = \begin{cases} \dot{x}_\mu(t_\mu) &= \pm_\mu l \\ \dot{y}_\mu(t_\mu) &= \delta y_\mu(t_\mu) \end{cases} \quad (\text{B.1a})$$

$$= \begin{cases} \dot{x}_\mu(t_\mu) &= \pm_\mu l \\ \dot{y}_\mu(t_\mu) &= \sum_{k_\mu} i k_\mu l a_{\mu, k_\mu} e^{i k_\mu t_\mu} \end{cases} \quad (\text{B.1b})$$

La longueur du contour est définie par :

$$L(\gamma) = \sum_\mu \int_{\square\gamma_\mu} |\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)| dt_\mu . \quad (\text{B.2})$$

où le vecteur tangent est donné par :

$$|\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)| = l \left[1 - \sum_{k_\mu, k'_\mu} a_{\mu, k_\mu} a_{\mu, k'_\mu} k_\mu k'_\mu e^{i(k_\mu + k'_\mu)t_\mu} \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (\text{B.3})$$

En développant l'expression donnée par l'équation B.3 en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 et en utilisant le fait que :

$$\int_{\square\gamma_\mu} e^{i k l t_\mu} dt_\mu = \delta(k) , \quad (\text{B.4a})$$

et

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad (\text{B.4b})$$

on aura :

$$\int_{\square\gamma_\mu} |\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)| dt_\mu \approx l \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{k_\mu} |a_{\mu,k_\mu}|^2 |k_\mu|^2 \right], \quad (\text{B.4c})$$

La longueur du contour sera donc :

$$\begin{aligned} L(\gamma) &\approx l \left[2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{k_\mu} |a_{\mu,k_\mu}|^2 |k_\mu|^2 \right] \\ &\approx l \left[2 + \frac{1}{2} \sum_k k^2 (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.4d})$$

B.2 Calcul de l'aire $A(\gamma)$

L'aire de la barre γ est définie par cette expression :

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= \int_{\square\gamma_1} l(y_1(t_1) - y_2(-t_1)) dt_1 \\ &= \int_{\square\gamma_1} l(w_0 + \delta y_1(t_1) - \delta y_2(-t_1)) dt_1, \end{aligned} \quad (\text{B.5a})$$

et en utilisant l'expression des perturbations exprimées en termes des coefficients de Fourier, et la valeur de l'intégrale donnée par B.4a, on aura :

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= l[w_0 + (a_{1,0} - a_{2,0})] \\ &= l[w_0 + \sum_{\mu} \pm_{\mu} a_{\mu,0}]. \end{aligned} \quad (\text{B.5b})$$

B.3 Calcul de l'énergie quadratique $E_Q(\gamma)$

L'expression générale de l'énergie quadratique $E_Q(\gamma)$ s'écrit sous cette forme :

$$E_Q(\gamma) = \sum_{\mu,\nu} \iint_{(\square\gamma_\mu, \square\gamma_\nu)} dt_\mu dt'_\nu G(t_\mu, t'_\nu) \quad (\text{B.6a})$$

G représente l'énergie d'interaction d'une paire de points t_μ et t'_ν , qui est donnée par cette expression :

$$G(t_\mu, t'_\nu) = \dot{\gamma}_\mu(t_\mu) \dot{\gamma}_\nu(t'_\nu) \phi(|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)|). \quad (\text{B.6b})$$

B.3.1 Produit interne des vecteurs tangents $\dot{\gamma}_\mu(t_\mu)$ et $\dot{\gamma}_\nu(t'_\nu)$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_\mu(t_\mu) \dot{\gamma}_\nu(t'_\nu) &= \dot{x}_\mu(t_\mu) \dot{x}_\nu(t'_\nu) + \dot{y}_\mu(t_\mu) \dot{y}_\nu(t'_\nu) \\ &= \pm_\mu \pm_\nu l^2 + \delta y_\mu(t_\mu) \delta y_\nu(t'_\nu) .\end{aligned}\quad (\text{B.7a})$$

B.3.2 Calcul de la distance quadratique

$$\begin{aligned}|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)|^2 &= (x_\mu(t_\mu) - x_\nu(t'_\nu))^2 + (y_\mu(t_\mu) - y_\nu(t'_\nu))^2 \\ &= [\pm_\mu l t_\mu - \pm_\nu l t'_\nu]^2 + \left[\frac{w_0}{2} (\pm_\mu - \pm_\nu) + \delta y_\mu(t_\mu) - \delta y_\nu(t'_\nu) \right]^2 ,\end{aligned}$$

En posant $\Delta_{\mu,\nu}^2 = (\pm_\mu l t_\mu - \pm_\nu l t'_\nu)^2$ et $X_0^2 = \Delta_{\mu,\nu}^2 + \frac{w_0^2}{2} (1 - \pm_\mu \pm_\nu)$, on aura :

$$\begin{aligned}|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)|^2 &= X_0^2 + (\delta y_\mu(t_\mu))^2 + (\delta y_\nu(t'_\nu))^2 + w_0 (\pm_\mu - \pm_\nu) \delta y_\mu(t_\mu) \\ &\quad - w_0 (\pm_\mu - \pm_\nu) \delta y_\nu(t'_\nu) - 2 \delta y_\mu(t_\mu) \delta y_\nu(t'_\nu) ,\end{aligned}$$

En développant cette expression en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2 au point X_0 , on aura :

$$\begin{aligned}|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)| &\approx X_0 + \frac{1}{2X_0} w_0 (\pm_\mu - \pm_\nu) \delta y_\mu(t_\mu) - \frac{1}{2X_0} w_0 (\pm_\mu - \pm_\nu) \delta y_\nu(t'_\nu) \\ &\quad + \frac{4X_0^2 - w_0^2 (\pm_\mu - \pm_\nu)^2}{8X_0^3} (\delta y_\mu(t_\mu))^2 + \frac{4X_0^2 - w_0^2 (\pm_\mu - \pm_\nu)^2}{8X_0^3} (\delta y_\nu(t'_\nu))^2 \\ &\quad - 2 \frac{4X_0^2 - w_0^2 (\pm_\mu - \pm_\nu)^2}{8X_0^3} \delta y_\mu(t_\mu) \delta y_\nu(t'_\nu) ,\end{aligned}$$

Pour simplifier l'équation précédente, on pose : $X_1 = \frac{1}{2X_0} w_0 (\pm_\mu - \pm_\nu)$, $X_2 = \frac{1}{2X_0} (1 - X_1^2)$ et $\Delta \delta y_{\mu,\nu} = \delta y_\mu(t_\mu) - \delta y_\nu(t'_\nu)$. On aura donc l'expression suivante :

$$|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)| \approx X_0 + X_1 \Delta \delta y_{\mu,\nu} + X_2 (\Delta \delta y_{\mu,\nu})^2 .$$

B.3.3 Fonction d'interaction

Le développement en série de Taylor de la fonction d'interaction Φ au point X_0 jusqu'à l'ordre 2 est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(|\gamma_\mu(t_\mu) - \gamma_\nu(t'_\nu)|) &\approx \Phi(X_0) + \left[X_1 \Delta \delta y_{\mu,\nu} + X_2 (\Delta \delta y_{\mu,\nu})^2 \right] \Phi'(X_0) + \frac{\Phi''(X_0)}{2} X_1^2 (\Delta \delta y_{\mu,\nu})^2 \\ &\approx \Phi(X_0) + X_1 \Phi'(X_0) \Delta \delta y_{\mu,\nu} + \left[X_2 \Phi'(X_0) + \frac{X_1^2}{2} \Phi''(X_0) \right] (\Delta \delta y_{\mu,\nu})^2 .\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

B.3.4 Calcul de $G(t_\mu, t'_\nu)$

En substituant les expressions données par les équations B.7a et B.9 dans B.6b, on aura :

$$\begin{aligned}
G(t_\mu, t'_\nu) &= \left\{ \Phi(X_0) + X_1 \Phi'(X_0) \Delta \delta y_{\mu, \nu} + \left[X_2 \Phi'(X_0) + \frac{X_1^2}{2} \Phi''(X_0) \right] (\Delta \delta y_{\mu, \nu})^2 \right\} \\
&\quad * \left\{ \pm_\mu \pm_\nu l^2 + \dot{\delta} y_\mu(t_\mu) \dot{\delta} y_\nu(t'_\nu) \right\} \\
&= \underbrace{\pm_\mu \pm_\nu l^2 \Phi(X_0)}_{F_{00}} \\
&\quad + \underbrace{\pm_\mu \pm_\nu l^2 X_1 \Phi'(X_0) \Delta \delta y_{\mu, \nu}}_{F_{10}} \\
&\quad + \underbrace{\pm_\mu \pm_\nu l^2 \left[X_2 \Phi'(X_0) + \frac{X_1^2}{2} \Phi''(X_0) \right] (\Delta \delta y_{\mu, \nu})^2}_{F_{20}} \\
&\quad + \underbrace{\Phi(X_0) \dot{\delta} y_\mu(t_\mu) \dot{\delta} y_\nu(t'_\nu)}_{F_{21}} . \tag{B.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu, \nu} \int_{\gamma_\mu} \int_{\gamma_\nu} G(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu &= \sum_{\mu, \nu} \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{00}(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu \\
&\quad + \sum_{\mu, \nu} \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{10}(t_\mu, t'_\nu) \Delta \delta y_{\mu, \nu} dt_\mu dt'_\nu \\
&\quad + \sum_{\mu, \nu} \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) (\Delta \delta y_{\mu, \nu})^2 dt_\mu dt'_\nu \\
&\quad + \sum_{\mu, \nu} \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{21}(t_\mu, t'_\nu) \dot{\delta} y_\mu(t_\mu) \dot{\delta} y_\nu(t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu . \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Pour le calcul de ses intégrales, on adoptera certains changements de variables en vue de simplification des calculs. Ses intégrales sont toutes de la forme suivante :

$$\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} f(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu . \tag{B.12}$$

avec $f(t_\mu, t'_\nu)$ est une fonction qui dépend de $\pm_\mu l t_\mu$ et $\pm_\nu l t'_\nu$.

En effectuant un premier changement de variable : $s_\mu = l t_\mu$ et $s'_\nu = l t'_\nu$, l'équation B.12 devient donc :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \frac{1}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(s_\mu, s'_\nu) ds_\mu ds'_\nu , \tag{B.13a}$$

Les fonctions F_{ij} définies précédemment dans l'équation B.10 dépendent de $(\pm_\mu s_\mu - \pm_\nu s'_\nu)$ donc un deuxième changement de variable peut être fait tels que $x = \pm_\mu s_\mu - \pm_\nu s'_\nu$ et $y = \pm_\mu s_\mu + \pm_\nu s'_\nu$ qui donne $s_\mu = \pm_\mu \frac{y+x}{2}$ et $s'_\nu = \pm_\nu \frac{y-x}{2}$. Or les variables s_μ et s'_ν sont comprises entre $-\frac{l}{2}$ et $\frac{l}{2}$, d'où la nouvelle région d'intégration est définie par : $\{(x, y) | -l \leq x \leq l, -l + |x| \leq y \leq l - |x|\}$. On obtient alors :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \frac{1}{2l^2} \int_{-l}^l \int_{-l+|x|}^{l-|x|} f(x, y) dx dy$$

L'expression de $f(x, y)$ s'écrit toujours comme un produit de deux fonctions : une qui dépend de la fonction d'interaction Φ donnée par l'équation 1.19 et ses dérivées (voir les expressions de F_{ij}) qui sont nulles pour une distance x supérieure à un seuil donné, et la deuxième fonction s'écrit comme une exponentielle provenant de la transformée de Fourier des perturbations. On approximera donc la région d'intégration, dûes aux caractéristiques de la fonction d'interaction Φ , par $\{(x, y) | -l \leq x \leq l, -l \leq y \leq l\}$. On aura donc :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \frac{1}{2l^2} \int_{-l}^l \int_{-l}^l f(x, y) dx dy . \quad (\text{B.13b})$$

Dans ce qui suit, on s'intéressera au calcul des différentes intégrales apparaissant dans l'équation B.11 en se basant sur l'égalité donnée par B.13b :

$$\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{00}(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \pm_\mu \pm_\nu l \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) dx . \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{10}(t_\mu, t'_\nu) \Delta\delta y_{\mu,\nu} dt_\mu dt'_\nu = \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{10}(t_\mu, t'_\nu) \left(\sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} e^{ik_\mu t_\mu} - \sum_{k_\nu} a_{\nu,k_\nu} e^{ik_\nu t'_\nu} \right) dt_\mu dt'_\nu \\ & \frac{1}{2l^2} \left\{ \int_{-l}^l \int_{-l}^l F_{10}(x) \sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} e^{\pm_\mu ik_\mu \frac{y+x}{2}} dx dy - \int_{-l}^l \int_{-l}^l F_{10}(x) \sum_{k_\nu} a_{\nu,k_\nu} e^{\pm_\nu ik_\nu \frac{y-x}{2}} dx dy \right\} \\ & = \frac{1}{2l^2} \left\{ \sum_{k_\mu} a_{\mu,k_\mu} \int_{-l}^l F_{10}(x) e^{\pm_\mu ik_\mu \frac{x}{2}} \underbrace{\left(\int_{-l}^l e^{\pm_\mu ik_\mu \frac{y}{2}} dy \right)}_{2l\delta(k_\mu)} dx \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k_\nu} a_{\nu,k_\nu} \int_{-l}^l F_{10}(x) e^{-\pm_\nu ik_\nu \frac{x}{2}} \left(\int_{-l}^l e^{-\pm_\nu ik_\nu \frac{y}{2}} dy \right) dx \right\} \\ & = \pm_\mu \pm_\nu l (a_{\mu,0} - a_{\nu,0}) \int_{-l}^l X_1(x) \Phi'(X_0(x)) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) (\Delta\delta y_{\mu,\nu})^2 dt_\mu dt'_\nu &= \underbrace{\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) (\delta y_\mu(t_\mu))^2 dt_\mu dt'_\nu}_{I_1} \\
&+ \underbrace{\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) (\delta y_\nu(t'_\nu))^2 dt_\mu dt'_\nu}_{I_2} \\
&- 2 \underbrace{\int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) \delta y_\mu(t_\mu) \delta y_\nu(t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu}_{I_3} \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) \sum_{k_\mu, k'_\mu} a_{\mu, k_\mu} a_{\mu, k'_\mu} e^{i(k_\mu + k'_\mu)t_\mu} dt_\mu dt'_\nu \\
&= \frac{1}{2l^2} \sum_{k_\mu, k'_\mu} a_{\mu, k_\mu} a_{\mu, k'_\mu} \int_{-l}^l F_{20}(x) e^{\pm i(k_\mu + k'_\mu)\frac{x}{2}} dx \underbrace{\int_{-l}^l e^{\pm i(k_\mu + k'_\mu)\frac{y}{2}} dy}_{2l\delta(k_\mu + k'_\mu)} \\
&= \frac{1}{l} \sum_{k_\mu} |a_{\mu, k_\mu}|^2 \int_{-l}^l F_{20}(x) dx \\
&= \frac{1}{l} \sum_k |a_{\mu, k}|^2 \int_{-l}^l F_{20}(x) dx .
\end{aligned}$$

Par raison de symétrie entre μ et ν dans les expressions de I_1 et I_2 , on aura :

$$I_2 = \frac{1}{l} \sum_k |a_{\nu, k}|^2 \int_{-l}^l F_{20}(x) dx .$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) \sum_{k_\mu, k_\nu} a_{\mu, k_\mu} a_{\nu, k_\nu} e^{ik_\mu t_\mu} e^{ik_\nu t'_\nu} dt_\mu dt'_\nu \\
&= \frac{1}{2l^2} \sum_{k_\mu, k_\nu} a_{\mu, k_\mu} a_{\nu, k_\nu} \int_{-l}^l F_{20}(x) e^{i(\pm_\mu k_\mu - \pm_\nu k_\nu)\frac{x}{2}} dx \underbrace{\int_{-l}^l e^{i(\pm_\mu k_\mu + \pm_\nu k_\nu)\frac{y}{2}} dy}_{2l\delta(\pm_\mu k_\mu + \pm_\nu k_\nu)} \\
&= \frac{1}{l} \sum_k a_{\mu, k} a_{\nu, -\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l F_{20}(x) e^{\pm_\mu ikx} dx .
\end{aligned}$$

En injectant les valeurs de I_1 , I_2 et I_3 dans B.15, on aura :

$$\begin{aligned}
& \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{20}(t_\mu, t'_\nu) (\Delta\delta y_{\mu,\nu})^2 dt_\mu dt'_\nu = \frac{1}{l} \sum_k |a_{\mu,k}|^2 \int_{-l}^l F_{20}(x) dx \\
& + \frac{1}{l} \sum_k |a_{\nu,k}|^2 \int_{-l}^l F_{20}(x) dx - 2 \frac{1}{l} \sum_k a_{\mu,k} a_{\nu,-\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l F_{20}(x) e^{\pm_\mu ikx} dx \\
& = \frac{1}{l} \sum_k \left\{ (|a_{\mu,k}|^2 + |a_{\nu,k}|^2) \int_{-l}^l F_{20}(x) dx - 2 a_{\mu,k} a_{\nu,-\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l F_{20}(x) e^{\pm_\mu ikx} dx \right\} \\
\\
& \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{21}(x) \delta y_\mu(t_\mu) \delta y_\nu(t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} F_{21}(x) \sum_{k_\mu, k_\nu} a_{\mu, k_\mu} a_{\nu, k_\nu} i^2 l^2 k_\mu k_\nu e^{ik_\mu l t_\mu} e^{ik_\nu l t'_\nu} dt_\mu dt'_\nu \\
& = -\frac{1}{2l^2} \sum_{k_\mu, k_\nu} a_{\mu, k_\mu} a_{\nu, k_\nu} l^2 k_\mu k_\nu \int_{-l}^l F_{21}(x) e^{i(\pm_\mu k_\mu - \pm_\nu k_\nu) \frac{x}{2}} dx \underbrace{\int_{-l}^l e^{i(\pm_\mu k_\mu + \pm_\nu k_\nu) \frac{y}{2}} dy}_{2l\delta(\pm_\mu k_\mu + \pm_\nu k_\nu)} \\
& = l \sum_k k^2 a_{\mu,k} a_{\nu,-\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) e^{\pm_\mu ikx} dx
\end{aligned}$$

En substituant les intégrales de l'équation B.11 par leurs expressions calculés précédemment, on aura :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\mu,\nu} \int_{\square\gamma_\mu} \int_{\square\gamma_\nu} G(t_\mu, t'_\nu) dt_\mu dt'_\nu = \sum_{\mu,\nu} \pm_\mu \pm_\nu l \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) dx \\
& + \sum_{\mu,\nu} \pm_\mu \pm_\nu l (a_{\mu,0} - a_{\nu,0}) \int_{-l}^l X_1(x) \Phi'(X_0(x)) dx \\
& + \sum_{\mu,\nu} \sum_k \pm_\mu \pm_\nu l (|a_{\mu,k}|^2 + |a_{\nu,k}|^2) \int_{-l}^l \left[X_2(x) \Phi'(X_0(x)) + \frac{X_1^2}{2} \Phi''(X_0(x)) \right] dx \\
& + \sum_{\mu,\nu} \sum_k -2 \pm_\mu \pm_\nu l a_{\mu,k} a_{\nu,-\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l \left[X_2(x) \Phi'(X_0(x)) + \frac{X_1^2}{2} \Phi''(X_0(x)) \right] e^{\pm_\mu ikx} dx \\
& + \sum_{\mu,\nu} \sum_k \pm_\mu \pm_\nu l k^2 a_{\mu,k} a_{\nu,-\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) e^{\pm_\mu ikx} dx
\end{aligned}$$

Pour le calcul de l'énergie quadratique E_Q , on procèdera par séparation de deux cas :
1er cas : $\pm_\mu \pm_\nu = 1$, ce qui donne $X_0(x) = |x|$, $X_1(x) = 0$ et $X_2(x) = \frac{1}{2|x|}$. On aura donc :

$$\begin{aligned}
E_Q^{\pm_\mu \pm_\nu = 1}(\gamma) &= E_Q(\gamma_1, \gamma_1) + E_Q(\gamma_2, \gamma_2) \\
&= \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = 1} \pm_\mu \pm_\nu l \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) dx \\
&+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = 1} \sum_k \pm_\mu \pm_\nu l (|a_{\mu,k}|^2 + |a_{\nu,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{2|x|} \Phi'(|x|) dx \\
&+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = 1} \sum_k -2 \pm_\mu \pm_\nu l a_{\mu,k} a_{\nu, -\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l \frac{1}{2|x|} \Phi'(|x|) e^{\pm_\mu ikx} dx \\
&+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = 1} \sum_k \pm_\mu \pm_\nu l k^2 a_{\mu,k} a_{\nu, -\pm_\mu \pm_\nu k} \int_{-l}^l \Phi(|x|) e^{\pm_\mu ikx} dx \\
&= 2l \int_{-l}^l \Phi(|x|) dx \\
&+ 2l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{2|x|} \Phi'(|x|) dx \\
&- 2l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{2|x|} \Phi'(|x|) e^{ikx} dx \\
&+ l \sum_k k^2 (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \Phi(|x|) e^{ikx} dx \\
&= 2l \int_{-l}^l \Phi(|x|) dx + l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) - \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) e^{ikx} + k^2 \Phi(|x|) e^{ikx} dx
\end{aligned}$$

2ème cas : $\pm_\mu \pm_\nu = -1$, ce qui donne $X_0(x) = \sqrt{x^2 + w_0^2}$, $X_1(x) = \pm_\mu \frac{w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}}$ et

$$X_2(x) = \frac{x^2}{2(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}}. \text{ On aura donc :}$$

$$\begin{aligned} E_Q^{\pm_\mu \pm_\nu = -1}(\gamma) &= E_Q(\gamma_1, \gamma_2) + E_Q(\gamma_2, \gamma_1) \\ &= \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = -1} -l \int_{-l}^l \Phi(X_0(x)) dx \\ &+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = -1} -l(a_{\mu,0} - a_{\nu,0}) \int_{-l}^l \pm_\mu \frac{w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\ &+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = -1} \sum_k -l(|a_{\mu,k}|^2 + |a_{\nu,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{x^2}{2(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{2(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\ &+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = -1} \sum_k 2l a_{\mu,k} a_{\nu,k} \int_{-l}^l \left[\frac{x^2}{2(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{2(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{\pm_\mu ikx} dx \\ &+ \sum_{\pm_\mu \pm_\nu = -1} \sum_k -l k^2 a_{\mu,k} a_{\nu,k} \int_{-l}^l \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) e^{\pm_\mu ikx} dx \\ &= -2l \int_{-l}^l \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx - 2l(a_{1,0} - a_{2,0}) \int_{-l}^l \frac{w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\ &- 2l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{x^2}{2(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{2(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\ &+ 2l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l \left[\frac{x^2}{2(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{2(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{ikx} dx \\ &- l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l k^2 \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) e^{ikx} dx \end{aligned}$$

L'énergie quadratique totale de la barre sera donc :

$$\begin{aligned}
E_Q(\gamma) &= E_Q^{\pm\mu\pm\nu=1}(\gamma) + E_Q^{\pm\mu\pm\nu=-1}(\gamma) \\
&= 2l \int_{-l}^l \Phi(|x|) dx - 2l \int_{-l}^l \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx - 2l(a_{1,0} - a_{2,0}) \int_{-l}^l \frac{w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\
&+ l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) - \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) e^{ikx} + k^2 \Phi(|x|) e^{ikx} dx \\
&- l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{x^2 + w_0^2} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\
&+ l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l \left[\frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{ikx} dx \\
&- l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l k^2 \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) e^{ikx} dx
\end{aligned}$$

L'énergie géométrique E_g du contour donnée par l'équation 3.3 devient donc :

$$\begin{aligned}
E_g(\gamma) &= \lambda_C l \left[2 + \frac{1}{2} \sum_k k^2 (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \right] \\
&+ \alpha_C l [w + (a_{1,0} - a_{2,0})] \\
&- \frac{\beta_C}{2} 2l \int_{-l}^l \Phi(|x|) - \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\
&+ \frac{\beta_C}{2} 2l(a_{1,0} - a_{2,0}) \int_{-l}^l \frac{w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\
&- \frac{\beta_C}{2} l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) - \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|) e^{ikx} + k^2 \Phi(|x|) e^{ikx} dx \\
&+ \frac{\beta_C}{2} l \sum_k (|a_{1,k}|^2 + |a_{2,k}|^2) \int_{-l}^l \frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{x^2 + w_0^2} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx \\
&- \frac{\beta_C}{2} l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l \left[\frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{ikx} dx \\
&+ \frac{\beta_C}{2} l \sum_k (a_{1,k} a_{2,k} + a_{1,-k} a_{2,-k}) \int_{-l}^l k^2 \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) e^{ikx} dx
\end{aligned}$$

On s'intéressera dans notre analyse du modèle des contours actifs d'ordre supérieur d'une barre de longueur infinie. Pour simplifier l'expression de l'énergie totale de la barre, on définit les expressions suivantes :

$$G_{00}(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(|x|) - \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx ,$$

$$G_{10}(w_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-w_0}{\sqrt{x^2 + w_0^2}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) dx ,$$

$$G_{20}(w_0, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) - \frac{1}{|x|} \Phi'(|x|)(1 - e^{ikx}) - k^2 \Phi(|x|) e^{ikx} dx ,$$

$$G_{21}(w_0, k) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{(x^2 + w_0^2)^{\frac{3}{2}}} \Phi'(\sqrt{x^2 + w_0^2}) - \frac{w_0^2}{(x^2 + w_0^2)} \Phi''(\sqrt{x^2 + w_0^2}) + k^2 \Phi(\sqrt{x^2 + w_0^2}) \right] e^{ikx} dx .$$

Bibliographie

- I. Ben Ayed, A. Mitiche, et Z. Belhadj. Polarimetric image segmentation via maximum-likelihood approximation and efficient multiphases level-sets. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 28(9) :1493–1500, Septembre 2006.
- V. Caselles, F. Catte, T. Coll, et F. Dibos. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 :1–31, 1993.
- V. Caselles, R. Kimmel, et G. Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- T.F Chan et L.A Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10-2 :266–277, 2001.
- L. D. Cohen et I. Cohen. Finite-element methods for active contour models and balloons for 2-D and 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(11) :1131–1147, 1993.
- L.D. Cohen. On active contours and balloons. *CVGIP : Image Understanding*, 53 :211–218, 1991.
- P. Horvath, I.H. Jermyn, Z. Kato, et J. Zerubia. A higher-order active contour model of a ‘gas of circles’ and its application to tree crown extraction. Research Report 6026, INRIA, France, November 2006a. URL <http://hal.inria.fr/inria-00115631>.
- P. Horvath, I.H. Jermyn, Z. Kato, et J. Zerubia. A higher-order active contour model for tree detection. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, Hong Kong, August 2006b.
- S. Jehan-Besson, M. Barlaud, et G. Aubert. DREAM²S : Deformable regions driven by an Eulerian accurate minimization method for image and video segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 53 :45–70, 2003.
- M. Kass, A. Witkin, et D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1(4) :321–331, 1988.
- S. Kichenassamy, A. Kumar, P. Olver, A. Tannenbaum, et A. Yezzi. Gradient flows and geometric active contour models. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision*, pages 810–815, Boston, MA, USA, 1995.

- R. Malladi, J. A. Sethian, et B. C. Vemuri. Shape modeling with front propagation : A level set approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17 :158–175, 1995.
- N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(3) :266–230, 2000.
- N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions : A new framework to deal with frame partition problems in computer vision. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13 :249–268, 2002a.
- N. Paragios et R. Deriche. Geodesic active regions and level set methods for supervised texture segmentation. *International Journal of Computer Vision*, 46 :223–247, 2002b.
- M. Rochery, I. H. Jermyn, et J. Zerubia. Higher order active contours. Research Report 5656, INRIA, France, August 2005.
- M. Rochery, I.H. Jermyn, et J. Zerubia. Higher order active contours. *International Journal of Computer Vision*, 69(1) :27–42, August 2006.
- G. Sapiro. *Geometric partial differential equations and image analysis*. Cambridge University Press, 2001.

RÉSUMÉ

Ce travail aborde le problème de de stabilité du modèle des CAOS qui introduit une connaissance a priori sur la géométrie de l'objet à détecter dans le cadre général de la reconnaissance de forme dans une image. Ce modèle définit une énergie d'interaction longue portée favorisant le choix du contour initial. Cette nouvelle génération des contours actifs a été utilisée pour l'extraction des réseaux routiers et des arbres seulement en choisissant les bonnes valeurs des paramètres du modèle des CAOS.

Nous avons étudié, dans un premier temps, l'analyse de stabilité du modèle de « gaz de cercles » pour l'extraction des arbres (ou des structures circulaires) en déterminant le diagramme de phase d'un cercle définissant les gammes des valeurs des paramètres du modèle des CAOS donnant un cercle stable. En vue de l'extraction des réseaux linéiques tel que les routes, nous avons étudié en second temps l'analyse de stabilité du modèle d'une « barre longue » en déterminant le diagramme de phase définissant les gammes des valeurs des paramètres du modèle des CAOS permettant d'avoir une portion stable d'une barre de longueur infinie. L'analyse de stabilité des deux modèles (cercle et barre) est basée sur le développement de l'énergie géométrique du contour en série de Taylor jusqu'au second ordre ; la dérivée première et la dérivée seconde de l'énergie nous permettent de contraindre les paramètres du modèle des CAOS.

Mots clefs : Contours actifs d'ordre supérieur, géométrie a priori, forme, extraction de linéiques, détection des arbres, images satellitaires et aériennes.

ABSTRACT

This work addresses the question of stability of HOAC models. HOAC models introduce sophisticated prior geometric knowledge to describe a general family of shapes. These models define a long-range interaction energy. This new generation of active contours is used to extract road networks and trees from remote sensing images by selecting good values for the HOAC model parameters.

First, we start our study with the stability analysis of the « gas of circles » model for tree detection application. Our aim is to determine the model's phase diagram and hence obtain the range for the parameters of the HOAC model and the radius of the resulting stable circle. The second part of this work is to determine the phase diagram of « long bar » model, for road network extraction. The stability analysis for both configurations (bar and circle) is based on a Taylor series expansion of the energy up to second order. The first and second derivative of the energy allow us to constrain the HOAC model parameters.

Keywords : Higher order active contours, prior geometry, shape, line extraction, tree detection, satellite and aerial imagery.